BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor berasal dari matematikawan Inggris yang bernama Brook Taylor (1685-1731), deret ini sering digunakan untuk menurunkan suatu metode numerik. Berikut diberikan definisi mengenai deret Taylor.

Definisi 2.1 Deret Taylor (Dukkipati, 2010), Misalkan $f(x)$ kontinu yang memiliki turunan ke-$(n+1)$ di selang $[a,b]$ untuk setiap $n \geq 0$, dan misalkan $x, x_0 \in [a,b]$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{2.1}$$

untuk $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$. (2.2)

dan $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t) f^{(n+1)}(t)\,dt$. (2.3)

Juga, terdapat sebuah titik ξ_x diantara x dan x_0 sedemikian hingga:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \tag{2.4}$$

dengan $R_n(x)$ adalah sisanya.

Jika dimisalkan $(x-x_0) = h$, maka $f(x)$ dapat ditulis dengan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{2.5}$$

Contoh 2.1 : Tentukan suku banyak deret Taylor berderajat 1 dan 3 dari fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan suku sisanya di sekitar $x_0 = 9$.

Penyelesaian:

Langkah pertama tentukan polinom orde tiga dari $f(x) = \sqrt{x}$, dengan menentukan turunan pertama sampai ke empat berturut-turut yaitu: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$f''(x)=\dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$, $f'''(x)=\dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$, dan $f^{(4)}(x)=\dfrac{-15}{16x^3\sqrt{x}}$. Kemudian, substitusikan nilai $x_0=9$ ke $f'(x)$, $f''(x)$ dan $f'''(x)$ sehinga di peroleh:

$f'(9)=\dfrac{1}{6}$, $f''(x)=\dfrac{-1}{108}$, dan $f'''(9)=\dfrac{3}{1944}$.

Oleh karena itu Polinomial Taylor berderajat 1 dan 3 dari fungsi $f(x)=\sqrt{x}$ disekitar $x_0=9$ adalah:

$$p_1(x)=f(9)+f'(9)(x-9)$$

$$=3+\frac{1}{6}(x-9)$$

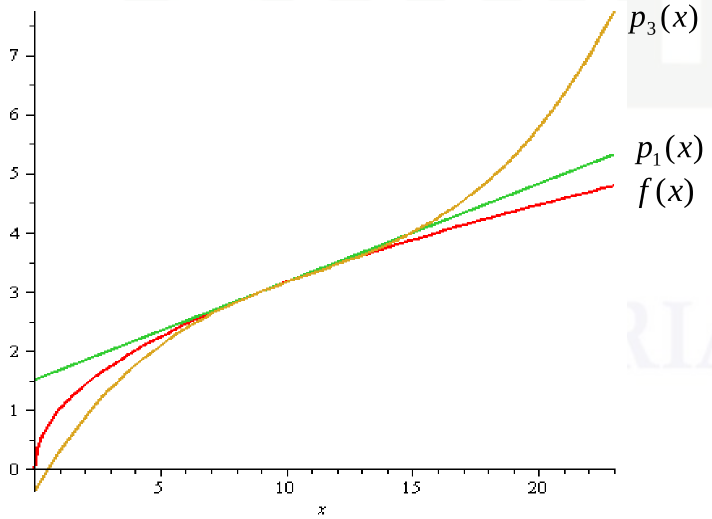
$$R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-9)^2=\frac{-1}{(2)(4)\xi_x\sqrt{\xi_x}}(x-9)^2=\frac{-1}{8\xi_x^3\sqrt{\xi}}(x-9)^2$$

$$p_3(x)=f(9)+f'(9)(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3$$

$$=3+\frac{1}{6}(x-9)-\frac{1}{108}(x-9)^2+\frac{3}{1944}(x-9)^3$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-9)^4=\frac{-15}{(24)(16)\xi_x^3\sqrt{\xi_x}}(x-9)^4=\frac{-5}{128\,\xi_x^3\sqrt{\xi}}(x-9)^4$$

ξ_x di antara 9 dan x, dengan bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 2.1 Hampiran fungsi f Menggunakan Deret Taylor

2.2 Orde Konvergensi

Orde korvengensi merupakan suatu ukuran atau indikator kelajuan sebuah metode iterasi dalam menghampiri persamaan fungsi nonliniear $f(x)=0$. Semakin besar orde konvergensi sebuah metode iterasi maka akan lebih cepat dalam menghampiri solusi persamaan fungsi tersebut.

Definisi 2.2 ***Efficiensi Index*** **(Epperson, 2013)** jika p adalah banyak orde, dan w adalah jumlah dari evaluasi fungsi suatu metode termasuk juga fungsi turunannya, maka indeks efisiensi didefinisikan sebagai berikut:

$$IE = p^{1/w} \tag{2.6}$$

Berdasarkan Persamaan (2.6) dapat dilihat bahwa, semakin kecil jumlah evaluasi fungsinya semakin besar indeks efisiensinya.

Definisi 2.3 Orde Konvergensi (Sharma, 2011), Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan iterasi galat ke-n, dengan persamaan $e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1})$ merupakan persamaan galat. Jika diperoleh persamaan galat untuk setiap metode itersi, maka nilai p adalah orde konvergensi,

Contoh 2.2 : Tunjukkanlah bahwa metode Schroder dengan bentuk :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}$$

memiliki orde konvergensi dua.

Penyelesaian :

Diketahui α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$ dengan $f'(\alpha)\neq 0$, maka ekspansi deret Taylor $f(x)$ disekitar α diberikan oleh:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \Lambda$$

Jika $x = x_n$, maka

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3 + \Lambda$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(\alpha)=0$,

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha)e_n^{\ 2} + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}) \,,$$

$$= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha)e_n^{\ 2} + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}) \,,$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)} e_n^{\ 2} + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)} e_n^{\ 3} + \frac{O(e_n^{\ 4})}{f'(\alpha)} \right),$$

$$= f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^{\ 2} + c_3 e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4})) \,, \tag{2.7}$$

dengan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ $\;j = 2, 3, \ldots$.

Dengan cara yang sama, maka diperoleh masing-masing $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ yang diberikan oleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3})\right), \tag{2.8}$$

dan

$$f''(x_n) = f'(\alpha)\left(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^{\ 2})\right). \tag{2.9}$$

Kemudian, dengan menggunakan Persamaan (2.7), (2.8) dan (2.9) diperoleh persamaan:

$$f(x_n) f'(x_n) = f'^2(\alpha)\left(e_n + 3c_2 e_n^2 + (4c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right),$$

Kuadratkan Persamaan (2.8) sehingga diperoleh:

$$f'^2(x_n) = f'^2(\alpha)\left(1 + 4c_2 e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)\right),$$

dan

$$f(x_n) f''(x_n) = f'^2(\alpha)\left(2c_2 e_n + (6c_3 + 2c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)\right),$$

Sehingga

$$f'^2(x_n) - f(x_n) f''(x_n) = f'^2(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 2c_2^2 e_n^2 + O(e_n^3)\right),$$

dan

$$\frac{f(x_n) f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n) f''(x_n)} = \frac{f'^2(\alpha)\left(2c_2 e_n + (6c_3 + 2c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)\right)}{f'^2(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 2c_2^2 e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \,,$$

$$= e_n + c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \,,$$

Selanjutnya hasil yang didapat disubstitusikan ke bentuk iterasi Schroder, diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - (e_n + c_2 e_n^2 + O(e_n^3)) .$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ sehingga diperoleh:

$$e_{n+1} + \alpha = (e_n + \alpha) - (e_n + c_2 e_n^2 + O(e_n^3))$$

atau

$$e_{n+1} = -c_2 e_n^2 + O(e_n^3) .$$

Berdasarkan definisi mengenai orde konvergensi, dari persamaan galat di atas diperoleh nilai $p = 2$ dan $m = 3$. Artinya, terbukti bahwa metode Schroder memiliki orde konvergensi dua dan memiliki $IE = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992$.

Definisi 2.4 *Computational Order of Convergence* (Weerakoon, 2000) Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α, maka *computational order of convergence* (*COC*) dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha / (x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha) / (x_{n-1} - \alpha)\right|} . \tag{2.10}$$

Contoh 2.3: Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 10$, tentukan *COC* metode Schroder:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{f'^2(x_n) - f(x_n) f''(x_n)} , \tag{2.11}$$

dengan $\alpha = 2{,}1544346900$, tebakan awal $x_0 = 1{,}9$ dan toleransi yang digunakan $\varepsilon = 1{,}0 \times 10^{-10}$.

Penyelesaian:

Diberikan $f(x)$, $f'(x) = 3x^2$ dan $f''(x) = 6x$ dengan mengunakan tebakan nilai awal $x_0 = 1{,}9$ sehingga $f(x_0) = -3{,}141$, $f'(x_0) = 10{,}83$ dan $f''(x_0) = 11{,}4$

Substitusikan ke Persamaan (2.10)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)f'(x_0)}{f'^2(x_0) - f(x_0)f''(x_0)},$$

$$= 1{,}9 - \frac{(-3{,}141)(10{,}83)}{(10{,}83)^2 - (-3{,}141)(11{,}4)},$$

$$= 2{,}1221936781.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $x_2 = 2{,}1539474284$, $x_3 = 2{,}1544345798$ dan $x_4 = 2{,}1544346900$

Nilai *COC* dapat dicari dengan menggunakan Persamaan (2.10) maka diperoleh:

$$\rho_1 = \frac{\ln\left|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)\right|}$$

$$= \frac{\ln\left|(2{,}1539474284 - 2{,}1544346900)/(2{,}1221936781 - 2{,}1544346900)\right|}{\ln\left|(2{,}1221936781 - 2{,}1544346900)/(1{,}9 - 2{,}1544346900)\right|}$$

$$= \frac{\ln\left|0{,}0004872616 / 0{,}0322410119\right|}{\ln\left|0{,}0322410119 / 0{,}2544346900\right|}$$

$$= 2{,}0293268353$$

dan dengan menggunakan cara yang sama maka diperoleh:

$$\rho_2 = 2{,}0023138996 \text{ dan } \rho_3 = 2{,}0000179549.$$

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dari *COC* Metode Iterasi Schroder

n	x_n	*COC*
1	2,1221936781	-
2	2,1539474284	2,0293268353
3	2,1544345798	2,0023138996
4	2,1544346900	2,0000179549

Berdasarkan Tabel 2.1 bahwa iterasi metode Schroder pada Persamaan (2.11) memiliki orde konvergensi dua.

2.3 Rata-rata Pangkat m_λ

Diberikan λ yang merupakan bilangan asli terbatas, rata-rata pangkat m_λ dari bilangan positif skalar a dan b didefinisikan sebagai berikut:

$$m_\lambda = \left(\frac{\left(a^\lambda + b^\lambda\right)}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{2.12}$$

Untuk $\lambda = -1$ dinamakan rata-rata Harmonik dengan persamaannya sebagai berikut:

$$m_{-1} = \frac{2ab}{a+b}. \tag{2.13}$$

Jika $\lambda = 1/2$ maka persamaan m_λ menjadi:

$$m_{1/2} = \left(\frac{\left(a^{1/2} + b^{1/2}\right)}{2}\right)^{2}. \tag{2.14}$$

Jika $\lambda = 1$ dinamakan rata-rata Aritmatik dengan persamaan m_λ sebagai berikut:

$$m_1 = \frac{a+b}{2}. \tag{2.15}$$

dan ketika $\lambda \to 0$ dinamakan rata-rata geometri dengan persamaan m_λ menjadi:

$$m_0 = \lim_{\alpha \to 0} m_\alpha = \sqrt{ab}. \tag{2.16}$$

2.4 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan metode yang terkenal untuk menyelesaikan solusi sebuah fungsi nonlinear. Metode ini sederhana, namun memiliki kekurangan yaitu mempunyai turunan.

Metode Newton-Raphson diperoleh dari pendekatan secara geometri yang diberikan pada Gambar 2.2. Misalkan bahwa x_0 adalah taksiran pertama untuk akar x dari persamaan $f(x) = 0$ dan $f'(x)$ berada di selang yang memuat setiap taksiran dari x. Kemiringan dari garis singgung untuk grafik dari f di titik $(x_0, f(x_0))$ adalah $f'(x_0)$, sehingga diperoleh persamaan garis singgung adalah

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.17}$$

Oleh karena garis pada Persamaan (2.17) melintasi x-axis ketika titik y-koordinat pada garis nol, pendekatan selanjutnya x_1 ke x memenuhi persamaan berikut:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{2.18}$$

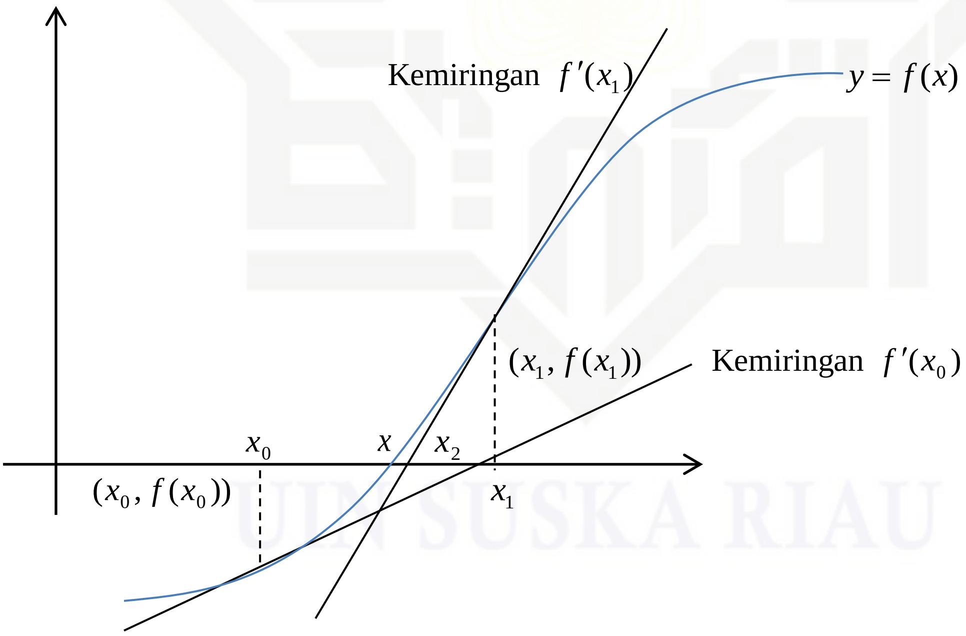
Sehingga

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{2.19}$$

dengan $f'(x_0) \neq 0$. Taksiran selanjutnya untuk x dengan menggunakan cara yang sama, secara umum dihasilkan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.20}$$

Berikut adalah taksiran geometri metode Newton-Rhapson:



Gambar 2.2 Metode Newton-Rhapson

Teorema 2.1 : Misalkan $f : D \rightarrow \Re$ yang mempunyai turunan pada interval (a,b), dimana $(a,b) \in D$. Jika $f(x)$ mempunyai akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai dugaan awal yang cukup dekat ke α, metode iterasi pada Persamaan (2.20) memenuhi persamaan galat

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \, , \tag{2.21}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2,3,\ldots$.

Bukti : Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, diperoleh:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \cdots \; .$$

Jika $x = x_n$, maka

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots$$

Oleh Karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(\alpha) = 0$ sehingga:

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha) e_n{}^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha) e_n{}^3 + O(e_n{}^4) \, , \\
&= f'(\alpha) e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha) e_n{}^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha) e_n{}^3 + O(e_n{}^4) \, , \\
&= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\, f'(\alpha)} e_n{}^3 + \frac{O(e_n{}^4)}{f'(\alpha)} \right), \\
&= f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + O(e_n{}^4)).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Kemudian akan ditentukan $f'(\alpha)$, diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3)) \tag{2.23}$$

Apabila Persamaan (2.22) dibagi dengan Persamaan (2.23), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + O(e_n{}^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3))} \, ,$$

$$= \frac{e_n + c_2 e_n^{\ 2} + c_3 e_n^{\ 3} + \mathrm{O}(e_n^{\ 4})}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^{\ 2} + \mathrm{O}(e_n^{\ 3})} ,$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3) . \qquad (2.24)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.24) ke Persamaan (2.20) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2 e_n^{\ 2} + \mathrm{O}(e_n^{\ 3})) . \qquad (2.25)$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, sehingga:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^{\ 2} + \mathrm{O}(e_n^{\ 3}) . \qquad (2.26)$$

Contoh 2.3 (Dukkipati, 2010) : Hitunglah akar hampiran dari $f(x) = e^x - 3x^2$ dengan menggunakan metode Newton-Raphson dengan $\varepsilon = 10^{-5}$ serta tebakan awal akar $x_0 = 1$ dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Penyelesaian :

Diberikan fungsi non linear sebagai berikut:

$$f(x) = e^x - 3x^2 .$$

turunan pertama dari $f(x)$ adalah

$$f'(x) = e^x - 6x .$$

Substitusikan ke metode Newton-Rhapson untuk menentukan akar dari $f(x) = 0$ sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 3x_n^{\ 2}}{e^{x_n} - 6x_n} .$$

Untuk $n = 0$ dan $x_0 = 1$ diperoleh:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} ,$$

$$= 1 - \frac{e^1 - 3(1)^2}{e^1 - 6(1)} ,$$

$$= 1 - 0{,}08584 ,$$

$$= 0{,}91416 ,$$

dengan menggunakan cara yang sama sehingga hasilnya dapat dipaparkan dalam tabel berikut ini:

Tabel 2.2 Hasil iterasi metode Newton-Rhapson untuk Fungsi $f(x)=e^x-3x^2$ dengan $\varepsilon=0.00001$ dan $x_0=1$

i	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$
0	1,00000	$-0{,}28172$	$-3{,}28172$	-
1	0,91416	$-0{,}01237$	$-2{,}99026$	0,09391
2	0,91002	$-0{,}00003$	$-2{,}97574$	0,00455
3	0,91001	0,00000	$-2{,}97570$	0,00001

Iterasi akan berhenti apabila memenuhi $\lvert x_{n+1}-x_n \rvert \le \varepsilon,$ dapat dilihat dari Tabel 2.2 bahwa iterasi berhenti pada itersi ke tiga.

2.5 Metode Weerakoon dan Orde Konvergensinya

Pada tahun 2000, Weerakon-Fernando memodifikasi metode Newton menggunakan aturan Trapesium dengan bentuk iterasi sebagai berikut:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)}, \tag{2.27}$$

dengan y_n pada Persamaan (1.2) yang memiliki orde konvergensi tiga.

Teorema 2.2 : Misalkan $f:D\to\Re$ berada diselang terbuka D. Asumsikan f', f'', f''' berada diselang D. Jika $f(x)$ mempunyai akar sederhana di $\alpha\in D$ dan x_0 sangat dekat ke α, kemudian persamaan memenuhi persamaan galat sebagai berikut:

$$e_{n+1}=\left(c_2^2+\frac{1}{2}c_3\right)e_n^3+O(e_n^4), \tag{2.28}$$

dengan $e_n=x_n-\alpha$ dan $c_j=\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)j!}, j=2,3,\ldots$.

Bukti: Misalkan α akar sederhana dari $f(x)$ yaitu $f(\alpha)=0$ dan $f'(\alpha)\neq 0$ dan $x_n=\alpha+e_n$. Gunakan ekspansi deret Taylor berikut:

$$f(x_n)=f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^{\,2}+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^{\,3}+O(e_n^{\,4}),$$

$$= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha)e_n{}^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)e_n{}^3 + O(e_n{}^4)\ ,$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\, f'(\alpha)} e_n{}^3 + \frac{O(e_n{}^4)}{f'(\alpha)} \right),$$

$$= f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + O(e_n{}^4))\ , \tag{2.29}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)\, j!}$, $j = 2, 3, \ldots$.

Turunkan Persamaan (2.29) sehingga diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3)). \tag{2.30}$$

Bagikan Persamaan (2.29) dengan Persamaan (2.30) sehingga diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.31}$$

Substitusikan Persamaan (2.31) ke Persamaan (1.2) sehingga diperoleh:

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.32}$$

Ekspansi deret Taylor terhadap $f(y_n)$ di sekitar α diperoleh:

$$f'(y_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.33}$$

Tambahkan Persamaan (2.30) dengan Persamaan (2.33) dan diperoleh:

$$f'(x_n) + f'(y_n) = 2 f'(\alpha)\left(1 + c_2 e_n + \left(c_2^2 + \frac{3}{2} c_3 \right) e_n^2 + O(e_n^3) \right). \tag{2.34}$$

Substitusikan Persamaan (2.29) dan Persamaan (2.34) ke Persamaan (2.27) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = \alpha + \left(c_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.35}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, sehingga Persamaan (2.35) dapat ditulis:

$$e_{n+1} = \left(c_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4). \qquad \blacksquare$$

2.6 Metode Homeier dan Orde Konvergensinya

Merujuk pada artikel (Homeier, 2005) yang memodifikasi metode Newton menggunakan interpolasi kuadratur dengan bentuk metode iterasi yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right). \tag{2.36}$$

dengan y_n pada Persamaan (2.17) yang memiliki orde konvergensi tiga.

Teorema 2.3 : Misalkan $f : D \to \Re$ adalah fungsi yang mempunyai turunan secukupnya pada interval terbuka *D*. Selanjutnya, asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan jika diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α, maka metode iterasi Persamaan (2.36) mempunyai orde konvergensi tiga dan memenuhi persamaaan galat.

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.37}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)\, j!}$ dan $e_n = x_n - \alpha.$

Bukti. Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0,$ sehingga $f'(\alpha) \neq 0$. Selanjutnya dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^{\,2} + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^{\,3} + O(e_n^{\,4}),\\
&= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^{\,2} + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^{\,3} + O(e_n^{\,4}),\\
&= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^{\,2} + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^{\,3} + \frac{O(e_n^{\,4})}{f'(\alpha)}\right),\\
&= f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^{\,2} + c_3 e_n^{\,3} + O(e_n^{\,4})).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)\, j!}$, $j = 2, 3, \dots$.

Selanjutnya turunan pertama dari $f(x)$ diberikan oleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 {e_n}^2 + \mathrm{O}({e_n}^3)). \tag{2.39}$$

Bagikan Persamaan (2.38) dengan Persamaan (2.39) sehingga diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.40}$$

Substitusikan Persamaan (2.40) ke Persamaan (1.2) sehingga diperoleh:

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.41}$$

Ekspansi deret Taylor terhadap $f(y_n)$ di sekitar α sehingga diperoleh:

$$f'(y_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4c_2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)) \tag{2.42}$$

Berdasarkan Persamaan (2.39) dan (2.42) sehingga diperoleh masing-masing:

$$\frac{1}{f'(x_n)} = 1 - 2c_2 e_n + (-3c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3), \tag{2.43}$$

dan

$$\frac{1}{f'(y_n)} = 1 - 2c_2^2 e_n^2 + (-4c_2 c_3 + 4c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.44}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.39), Persamaan (2.43), dan Persamaan (2.44) ke Persamaan (2.36) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.45}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, sehingga Persamaan (2.45) dapat ditulis sebagai berikut:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}c_3 e_n^3 + O(e_n^4).$$

■