BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Turunan

Definisi 2.1 (Varberg, Purcell, 2005) Turunan fungsi f adalah fungsi lain f'(dibaca " f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \tag{2.1}$$

asalkan limit ini ada.

Notasi yang paling umum digunakan untuk notasi turunan yaitu notasi *Leibniz* dan notasi *Lagrange*. Notasi *Leibniz* digunakan jika persamaan melibatkan y dan x, ditulis dalam bentuk $\frac{dy}{dx}$, sedangkan notasi *Lagrange* ditulis dalam bentuk $f'(x)$.

Beberapa aturan dalam turunan adalah sebagai berikut:

1. Aturan fungsi konstanta.
   Jika $f(x) = k$, dengan k suatu konstanta maka untuk sembarang x, $f'(x) = 0$.
2. Aturan pangkat.
   Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif , maka $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Aturan jumlah atau aturan selisih.
   Jika u dan v adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.
4. Aturan hasil kali.
   Jika u dan v adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
5. Aturan hasil bagi.
   Jika u dan v adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka dengan $v \neq 0$, maka $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Contoh 2.1

Jika $f(x)=2x^3-4x^2+7x-8$, carilah $f'(x)$ dan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$f(x)=2x^3-4x^2+7x-8$$

$$f'(x)=6x^2-8x+7$$

$$f''(x)=12x-8$$

Jadi, nilai $f'(x)=6x^2-8x+7$ dan nilai $f''(x)=12x-8$.

Contoh 2.2

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x)=|x|$ tidak mempunyai turunan di $x=0$.

Penyelesaian:

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Jika $x=c+h$ maka $h=x-c$. Sehingga,

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Kemudian, akan ditunjukkan fungsi $f(x)=|x|$ tidak mempunyai turunan di $x=0$ sebagai berikut:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to c}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\to c}\frac{|x|}{x}$$

Nilai limit pada bentuk diatas dikatakan ada apabila $\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ dan $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ada dan sama. Akan tetapi,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

dan

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Tidak sama, sehingga fungsi $f(x)=|x|$ tidak mempunyai turunan di $x=0$.

2.2 Integral

Integral merupakan kebalikan dari turunan. Integral dapat dinotasikan dengan lambang "$\int$". Pada bagian ini, dibahas mengenai pengintegralan fungsi rasional.

Contoh 2.3

Tentukan $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx$.

Penyelesaian:

Oleh karena $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ maka penjabaran pecahan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{x-11}{x^2+3x-4}=\frac{A}{(x+4)}+\frac{B}{(x-1)}$$

Selanjutnya ditentukan nilai A dan B, sebagai berikut:

$$=\frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)}$$

$$=\frac{Ax-A+Bx+4B}{(x+4)(x-1)}$$

$$=\frac{(A+B)x-(A-4B)}{(x+4)(x-1)}$$

$$\frac{x-11}{x^2+3x-4}=\frac{(A+B)x-(A-4B)}{(x+4)(x-1)}$$

maka diperoleh nilai $A=3$ dan $B=-2$. Sehingga,

$$=\frac{3}{(x+4)}-\frac{2}{(x-1)}$$

$$=3\int\frac{1}{(x+4)}-2\int\frac{1}{(x-1)}$$

$$=3\ln|x+4|-2\ln|x-1|+c$$

Jadi, $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx=3\ln|x+4|-2\ln|x-1|+c$.

2.3 Matriks

Definisi 2.2 (Heri, Agus, 2006) Matriks merupakan suatu susunan angka berbentuk segiempat. Angka-angka dalam suatu susunan itu disebut anggota dalam matriks. Ukuran matriks dinyatakan oleh jumlah baris dan jumlah kolom yang terdapat di dalamnya. Anggota pada baris ke-i dan kolom ke-j dari sebuah matriks A dapat dinyatakan sebagai A_{ij}. Sebuah matriks A berukuran $m \times n$ dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Suatu sistem persamaan linear dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi $A\mathbf{x} = b$. Pada bagian ini, dibahas matriks berordo 2×2. Misalkan matriks $A\mathbf{x} = b$ maka $\mathbf{x} = A^{-1}b$. Dimana A^{-1} (dibaca " Invers dari matriks A") diperoleh sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Contoh 2.4

Diketahui matriks $A\mathbf{x} = b$. Tentukan $\mathbf{x}$ jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\mathbf{x} = A^{-1}b$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\cdot 4 - 3\cdot 1}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} (4\cdot 8)+(-3\cdot 4) \\ (-1\cdot 8)+(2\cdot 4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 32+(-12) \\ (-8)+(8) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, diperoleh nilai $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.4 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan diferensial biasa orde dua merupakan persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde dua. Secara umum persamaan diferensial biasa orde dua dapat ditulis sebagai berikut:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x) \tag{2.4}$$

dengan fungsi-fungsi $p(x)$, $q(x)$ dan $r(x)$ adalah koefisien dari persamaan diferensial tersebut. Jika $g(x)=0$, maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde dua homogen. Sebaliknya, jika $g(x)\neq 0$ maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen.

2.4.1 Persamaan Diferensial Biasa Homogen Koefisien Konstanta

Pandang persamaan homogen linier orde dua berikut:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \tag{2.5}$$

dengan $p(x)$, $q(x)$ dan $r(x)$ adalah konstanta dan $p(x)\neq 0$. Selanjutnya dengan mengantikan $p(x)=a$, $q(x)=b$ dan $r(x)=c$ maka Persamaan (2.5) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y=e^{rx}$, sehingga diperoleh:

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2}+b\frac{d(e^{rx})}{dx}+c(e^{rx})=0$$

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$$

$$e^{rx}(ar^2+br+c)=0$$

Oleh karena $e^{rx}=0$, maka $y(x)=e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.6) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan karakteristik,

$$ar^2+br+c=0 \tag{2.7}$$

penyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.7) adalah:

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Penyelesaian khusus dari persamaan linear orde dua dengan persamaan karakteristik pada Persamaan (2.7) bergantung pada nilai diskriminan.

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai diskriminan adalah sebagai berikut:

1. Akar-akar Real dan Berbeda $(b^2-4ac>0)$.

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik ar^2+br+c adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.6) adalah $y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$.

2. Akar-akar Berulang $(b^2 - 4ac = 0)$.

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c$ adalah sama $(r_1 = r_2)$ maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.6) adalah $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + x c_2 e^{r_2 x}$.

3. Akar-akar imajiner $(b^2 - 4ac < 0)$.

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.6) adalah $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Contoh 2.5

Selesaikan persamaan diferensial $y'' - y' - 2y = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal persamaan karekteristiknya adalah $r^2 - r - 2 = 0$. Diskriminan untuk persamaan diatas adalah 9. Oleh karena $D > 0$, maka penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah akar real dan berbeda yaitu $r_1 = 2$ dan $r_2 = -1$, sehingga diperoleh $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial $y'' - y' - 2y = 0$ adalah $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

2.4.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Pandang persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.8}$$

Jika dimisalkan $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.9}$$

dan $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Kemudian, untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ sehingga $y_p'(x) = 2Ax + B$ dan $y_p''(x) = 2A$. Selanjutnya, untuk menentukan nilai A, B dan C dengan mensubstitusikan nilai-nilai $y_p(x)$, $y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam Persamaan (2.8) maka penyelesaian umum untuk Persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x). \tag{2.10}$$

Contoh 2.6

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = e^{3x}$.

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan homogen $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$. Persamaan karakteristik untuk persamaan homogen diatas adalah $r^2 + 16 = 0$. Diskriminan untuk persamaan diatas adalah -64. Oleh karena $D < 0$, maka penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah bilangan kompleks yaitu $\alpha = 0$ dan $\beta = 4$ maka diperoleh penyelesaian $y_c(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$. Selanjutnya, untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh $y_p(x) = C_3 e^{3x}$, $y'_p(x) = 3C_3 e^{3x}$, $y''_p(x) = 9C_3 e^{3x}$. Sehingga,

$$\begin{aligned}
y'' + 16y &= e^{3x} \\
9C_3 e^{3x} + 16(C_3 e^{3x}) &= e^{3x} \\
25C_3 e^{3x} &= e^{3x} \\
c_3 &= \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

maka diperoleh $y_p(x) = \frac{1}{25} e^{3x}$.

Jadi, penyelesaian umum dari persamaan $\frac{d^2y}{dx^2}+16y=e^{3x}$ adalah $y(x)=c_1\cos(4x)+c_2\sin(4x)+\frac{1}{25}e^{3x}$.

2.5 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium sebagai berikut:

Definisi 2.3 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{x}=f(x)$ dengan nilai awal $x(0)=x_0$, sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x})=0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik ekuilibrium digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.4 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika $\forall$ $\varepsilon>0$, $\exists$ $\delta>0$ sehingga $\|x_0-\bar{x}\|<\delta$ maka $\|x(t,x_0)-\bar{x}\|<\varepsilon$ untuk $t\geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{x}$ merupakan titik stabil dan $\exists$ $\delta>0$ sehingga $\lim_{t\to 0}\|x(t,x_0)-\bar{x}\|=0$ memenuhi $\|x_0-\bar{x}\|<\delta$ titik ekuilibrium $\bar{x}$ takstabil jika $\bar{x}$ tidak stabil.

Contoh 2.7

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial $\dot{x}=x$ dengan $x(0)=x_0$.

Penyelesaian:

$$\dot{x} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int dt$$

$$\ln x = t+c$$

dengan mengambil $x(0) = x_0$ maka untuk $t = 0$, $x = x_0$. Sehingga,

$$
\begin{aligned}
\ln x - t &= c \\
\ln x - 0 &= c \\
c &= \ln x_0
\end{aligned}
$$

sehingga,

$$
\begin{aligned}
\ln x - c &= t \\
\ln x - \ln x_0 &= t \\
\ln \frac{x}{x_0} &= t \\
\frac{x}{x_0} &= e^t \\
x &= x_0 e^t
\end{aligned}
$$

untuk $t \to \infty$ maka $x \to \infty$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = x$ tidak stabil karena setiap solusinya menuju ∞.

Contoh 2.8

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial $\dot{x} = -x$ dengan $x(0) = x_0$.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x \\
\frac{dx}{dt} &= -x \\
\int \frac{dx}{x} &= \int -dt \\
\ln x &= -t + c
\end{aligned}
$$

dengan mengambil $x(0) = x_0$ maka untuk $t = 0$, $x = x_0$. Sehingga,

$$
\begin{aligned}
\ln x + t &= c \\
\ln x + 0 &= c \\
c &= \ln x_0
\end{aligned}
$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
\ln x - c &= -t \\
\ln x - \ln x_0 &= -t \\
\ln \frac{x}{x_0} &= -t \\
\frac{x}{x_0} &= e^{-t} \\
x &= x_0 e^{-t}
\end{aligned}$$

untuk $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena setiap solusinya menuju 0.

2.6 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu, untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{2.11}$$

dengan $\mathbf{x}(t) \in \Re^n$ adalah vektor state internal dan $\mathbf{u}(t) \in \Re^m$ adalah fungsi kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan:

$$J(t_0) = \phi(\mathbf{x}(T_f), T_f) + \int_{t_0}^{T_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\,dt, \tag{2.12}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

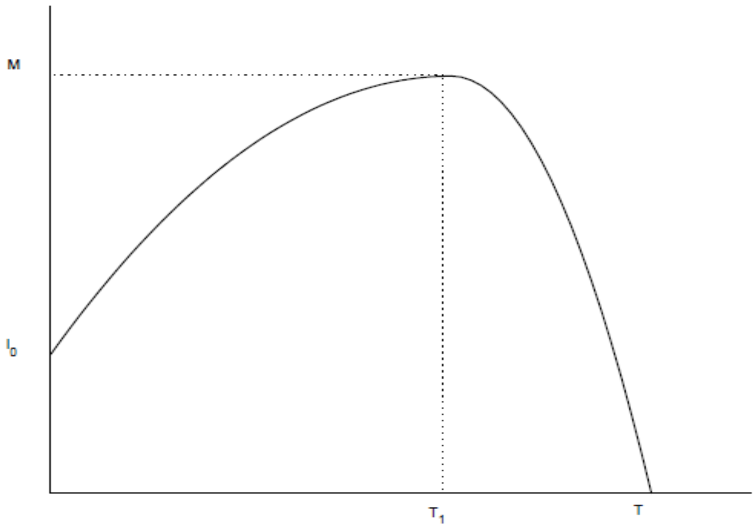
Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif.

Persamaan Hamilton:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{2.13}$$

2.7 Model dan Notasi Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan

Model ini didasarkan pada sistem persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan. Diasumsikan bahwa fase pertama dari 0 hingga t_1 untuk persediaan yang mengalami peningkatan, sedangkan fase kedua dari t_1 hingga T untuk persediaan yang mengalami penurunan. Fase waktu untuk persediaan barang dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 3.1 Grafik Persediaan Barang untuk Peningkatan dan Penurunan.

Di bawah ini di berikan notasi yang akan di gunakan untuk mengambarkan sistem dinamik dari persediaan barang yang mengalami peningkatan, yaitu:

$I(t)$ = Fungsi tingkat persediaan.

$P(t)$ = Fungsi tingkat rata-rata produksi.

I_0 = Tingkat persediaan awal.

$\theta(t)$ = Fungsi tingkat rata-rata penurunan.

$m(t)$ = Fungsi tingkat rata-rata peningkatan.

$v(t)$ =Selisih rata-rata fungsi peningkatan dan fungsi penurunan.

Di asumsikan bahwa fungsi tingkat persediaan dan fungsi tingkat rata-rata produksi ditentukan.

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t)\cdot I(t), \quad t \in [0, t_1]. \tag{2.14}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$. Kemudian, untuk menjamin bahwa tingkat persediaan meningkat dari waktu 0 hingga t_1 maka lebih lanjut dipenuhi

$$P(t) + v(t)\cdot I(t) > 0, \quad t \in [0, t_1]. \tag{2.15}$$

Kemudian, untuk dapat menuliskan fungsi tujuan secara eksplisit di kenalkan beberapa notasi tambahan dibawah ini:

h = Biaya penyimpanan.

K = Biaya Produksi.

$\hat{I}$ = Tingkat persediaan tujuan.

$\hat{P}$ = Tingkat produksi tujuan.

Selanjutnya, diberikan fungsi tujuan persediaan barang yang mengalami peningkatan sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right) dt \tag{2.16}$$

Persamaan (2.14) hingga Persamaan (2.16) merupakan batasan nonnegatif,

$$P(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.17}$$

Kemudian, pada pembahasan selanjutnya digunakan notasi $\dot{I}(t) = \dot{I}$, $I(t) = I$, $P(t) = P$ dan $v(t) = v$. Berdasarkan Persamaan (2.14) dan Persamaan (2.16) persamaan Hamilton di definisikan sebagai berikut:

$$H = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2 \right] + \lambda g$$

dengan $g = P + vI$, maka

$$H = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2 \right] + \lambda(P + vI)$$

$$H = -\frac{1}{2}h\left(I - \hat{I}\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(P - \hat{P}\right)^2 + \lambda P + \lambda vI \tag{2.18}$$

dan persamaan Lagrange didefinisikan sebagai berikut:

$$L = -\frac{1}{2}\left[h\left(I-\hat{I}\right)^2 + K\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + (\lambda+\mu)g$$

dengan $g = P + vI$. Maka,

$$L = -\frac{1}{2}\left[h\left(I-\hat{I}\right)^2 + K\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + (\lambda+\mu)(P+vI)$$

$$L = -\frac{1}{2}h\left(I-\hat{I}\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(P-\hat{P}\right)^2 + \lambda P + \lambda vI + \mu P + \mu vI \qquad (2.19)$$

Syarat kondisi optimal pada persediaan barang yang mengalami peningkatan yaitu:

$$H_P = 0 \qquad (2.20)$$

$$L_I = -\dot{\lambda} \qquad (2.21)$$

$$L_P = 0 \qquad (2.22)$$

$$\mu \geq 0;\ \mu g \geq 0 \qquad (2.23)$$

Pembahasan selanjutnya akan dibahas pada Bab IV.