BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan yang berkaitan dengan pembahasan pada Bab IV diantaranya Matriks, Operasi Matriks, Transpose Matriks, Invers Matriks, Partisi Matriks, Data Hilang , Algoritma EM dan uji χ^2.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Sutojo, 2010) matriks adalah susunan kumpulan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom berbentuk persegi panjang. Matriks dicirikan dengan elemen-elemen penyusun yang diapit oleh tanda kurung siku [ ] atau tanda kurung biasa ( ). Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan ordo, yaitu banyaknya baris dan kolom dalam matriks tersebut. Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam operasi-operasi antar matriks.

Matriks diberi nama dengan huruf besar misalnya A, B, C, P dan lain-lain. sedangkan elemen-elemennya dengan huruf kecil misalnya a_{11}, b_{21}, c_{34} dan lain-lain. Secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$. Artinya suatu matrik A yang elemen-elemennya adalah (a_{ij}) dimana indeks i menunjukkan baris ke-i dan indeks ke-j menunjukkan kolom ke-j. Sehingga bila matriks disusun secara $A_{(mxn)} = (a_{ij})$, mxn disebut ordo (ukuran) dari matriks A. Secara umum data ditulis dalam bentuk:

$$\underset{(mxn)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Matriks dengan dimensi baris $m = 1$, seperti :

$$B = \left[b_1, b_2, \ldots b_n \right] \tag{2.2}$$

disebut dengan vektor baris atau matriks baris. Sedangkan dengan dimensi kolom $n = 1$, seperti :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_m \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

disebut dengan vektor kolom atau matriks kolom.

2.2 Operasi Matriks

Operasi matriks adalah operasi aljabar terhadap dua atau lebih matriks yang meliputi :

2.2 1 Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan dan pengurangan matriks dapat dillakukan asalkan kedua matriks tersebut berukuran sama. Jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ dua buah matriks mxn, maka jumlah (selisih)-nya $A \pm B$ didefinisikan sebagai matriks $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ dengan tiap element C adalah jumlah (selisih) elemen A dan B yang seletak. Jadi,

$$A \pm B = \lfloor a_{ij} + b_{ij} \rfloor \tag{2.4}$$

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-2 & 2-3 & 3-0\\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

2.2.2 Perkalian Matriks

Perkalian matriks tidak komutatif maksudnya bila operasi perkalian $AB \neq BA$. Syarat perkalian matriks adalah banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua. Hasil perkalian antara matriks $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ berordo mxp, dengan matriks $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ berordo pxn. Maka perkalian matriks :

$$AXB = C \tag{2.5}$$

berordo mxn.

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 6\\ 6 & 9 & 6\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 4\\ 4 & 5 & 0\\ 8 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

$$\text{maka } C = AB = \begin{bmatrix}3 & 7 & 6\\ 6 & 9 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7 & 4\\ 4 & 5 & 0\\ 8 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.2+7.4+6.8 & 3.7+7.5+6.4 & 3.4+7.0+6.8\\ 6.2+9.4+6.8 & 6.7+9.5+6.4 & 6.4+9.0+6.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}82 & 80 & 60\\ 96 & 111 & 72\end{bmatrix}$$

Sifat perkalian matriks

1. $A(B+C)=AB+AC; (B+C)A=BA+CA$ memenuhi hukum distributif.
2. $A(BC)=(AB)C$ memenuhi hukum asosiatif.
3. Jika $AB=0$, yaitu matriks yang semua elemennya = 0, kemungkinannya :

a. $A = 0$ dan $B = 0$

b. $A = 0$ atau $B = 0$

c. $A \neq 0$ dan $B \neq 0$

4. Bila $AB = AC$ belum tentu $B = C$

2.3 Transpose Matriks

Pandang suatu matriks $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ berukuran mxn, maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran nxm yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-c dari A, $i = 1,2,...,m$ sebagai kolom ke-i dari A^T.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.4 Invers Matriks

Definisi 2.4 (Sutojo, 2010) Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB = BA = I$. Matriks B disebut invers matriks A ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo nxn. Invers dari sebuah matriks adalah unik (tunggal atau hanya ada satu) dan berlaku sifat : $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. Matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang nonsingular.

1. Mencari invers matriks dengan Eliminasi Gauss

Pada prinsipnya metode ini didasarkan pada pengolahan baris atau kolom. Sebelumnya dibuat dulu matriks $\left[A|I\right]$ kemudian matriks A pada $\left[A|I\right]$ dijadikan matriks identitas. Dan matriks I dari $\left[A|I\right]$ kemudian menjadi invers matriks A yang dinotasikan dengan A^{-1}.

Ada 3 cara untuk mengoperasikan baris / kolom:

a. Baris / kolom dikalikan dengan suatu konstanta

b. Dua baris / kolom dipertukarkan

c. Baris/kolom dikalikan dengan suatu konstanta dan ditambahkan atau dikurangkan dengan baris / kolom yang lain.

Contoh :

Cari invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1). Operasi baris $\rightarrow$ Baris 1 dikalikan $\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2). Operasi baris 2 $\rightarrow$ Baris 1 dikurangkan pada baris 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

3). Operasi baris 2 $\rightarrow$ Baris 2 dikalikan $-\frac{2}{3}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

4). Operasi baris 1 $\rightarrow$ Baris 2 dikali $\frac{1}{2}$ dikurangkan pada baris 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

5). Diperoleh $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

2. Mencari Invers dengan Determinan dan Adjoin

langkah-langkah yang diperlukan :

a. Matriksnya diketahui (misal matriks A)

b. Dari matriks A tersebut dibuat matriks kofaktor (matriks C)

c. Transpose matriks kofaktor (C)

d. Hitung determinan matriks A

e. Diperlukan invers matriks A dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C' \rightarrow C' = \text{Adjoin } A \tag{2.6}$$

untuk mencek gunakan $A^{-1}A = 1$

Khusus untuk matriks 2x2 invers matriks dihitung dengan rumus berikut :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{a_{12}}{|A|} \\ \frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Matriks berordo 3x3

a. Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Buat matriks kofaktor

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 6 & 28 \\ 20 & -4 & -12 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen dari matriks kofaktor dihitung sebagai berikut :

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -35 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 28$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 20 \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \quad C_{31} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

c. Transpose matriks kofaktor

$$C' = \begin{bmatrix} -35 & 20 & 5 \\ 6 & -4 & 2 \\ 28 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

d. Hitung determinan matriks A

Misal : melalui baris pertama

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{12}C_{13} \\ &= (2)(-35) + (1)(6) + (3)(28) \\ &= -70 + 6 + 84 \\ &= 20 \end{aligned}$$

e. Diperoleh invers matriks sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -35 & 20 & 5 \\ 6 & -4 & 2 \\ 28 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{35}{20} & \frac{20}{20} & \frac{5}{20} \\ \frac{6}{20} & -\frac{4}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{28}{20} & -\frac{12}{20} & -\frac{4}{20} \end{bmatrix}$$

2.5 Partisi Matriks

Sebuah matriks dapat dibagi menjadi bagian yang lebih kecil dengan garis pemisah/partisi mendatar dan vertikal.

Definisi 2.5 (Sofjan Assauri, 1983) partisi matriks adalah matriks yang dibagi-bagi menjadi matriks yang lebih kecil yang disebut sub matriks. Cara pembagian sub matriks dalam partisi matriks sangat tergantung pada kegunaannya dalam persoalan tertentu.

2.5.1 Operasi penjumlahan dan pengurangan

Bila A dan B adalah dua matriks yang dapat sesuai *(conformable)* untuk penambahan, maka A dan B mungkin dapat dipartisi. Matriks A_{ij} dan B_{ij} untuk $i = 1,...,r$ dan $j = 1,...,s$ sehingga :

$$A + B = \left[A_{ij} + B_{ij}\right] \qquad (2.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2.5.2 Operasi Perkalian

Operasi perkalian terhadap dua matriks A dan B adalah sebagai berikut :

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix} = C_{mqxsr}$$

dimana

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ip}B_{pj}, \; i = 1,2,\ldots,q; \; j = 1,2,\ldots,r, \qquad (2.8)$$

adalah matriks mxs

Contoh :

Misalkan

$$A_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 3 & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -4 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

dan

$$B_{4x6} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & \cdots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

dimana

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Maka perkalian matriks A dan B adalah

$$A_{4X4}B_{4X6} = C_{4X6} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & \cdots & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & \cdots & -3 & 7 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -12 & 0 & \cdots & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & \cdots & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}
$$

2.6 Data Hilang

Data hilang merupakan sebuah nilai yang mengindikasikan bahwa tidak ada data apapun yang tersimpan pada peubah amatan saat ini (Wikipedia). Dalam pengertian lain data hilang merupakan informasi yang tidak tersedia untuk sebuah kasus tertentu. Data hilang dapat terjadi karena informasi yang dibutuhkan untuk sesuatu pada satu atau beberapa variabel tidak diberikan, sulit dicari atau memang informasi tersebut tidak ada. Beberapa alasan mengapa data tersebut dapat hilang diantaranya adalah mungkin hilang karena peralatan tidak berfungsi, cuaca buruk, ataupun salah pengimputan terkait respon dari perespon.

2.7 Algoritma EM

Algoritma EM adalah sebuah metode optimisasi iteratif untuk estimasi Maksimum Likelihood (ML) yang berguna dalam permasalahan data yang tidak lengkap (*incomplete data*). Menurut Kus dan Kaya (2006), algoritma EM merupakan metode yang sangat tepat digunakan dalam menangani masalah data yang hilang atau data tersensor.

Kasus khusus dimana algoritma EM digunakan untuk memprediksi rata-rata populasi dan varians tidak diketahui dan harus diperkirakan mempunyai tahap E dan tahap M. Tahap E adalah mengisi nilai data hilang dengan nilai harapannya. Sedangkan tahap M adalah prediksi ulang parameter menggunakan algoritma sampai nilai prediksinya konvergen ke satu nilai tertentu (Dempster, Laird & Rubin, 1976).

1. Tahap Ekspektasi atau *Expectation Step* (E Step)

   Tahapan-tahapan ekspektasi data hilang dengan Algoritma EM adalah :

   a. Hitung nilai parameter dari data yang ada.

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{jk} \quad k = 1,2,...p \tag{2.9}$$

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{jk} - \bar{x}_k\right)^2 \quad k = 1,2,...p \tag{2.10}$$

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ji} - \bar{x}_i\right)\left(x_{jk} - \bar{x}_k\right) \; i = 1,2,...p \;\; k = 1,2,...p \tag{2.11}$$

dengan :

$\tilde{\mu}$ = rata-rata mean

$\tilde{\sigma}_k$ = varians

$\tilde{\sigma}_{ik}$ = kovarians

b. Masukkan ke persamaan

Untuk setiap $x_j^{(1)}$ adalah komponen yang hilang, dan $x_j^{(2)}$ adalah komponen yang ada. Untuk memprediksi $\tilde{\mu}$ dan $\tilde{\Sigma}$ digunakan mean distribusi bersyarat $x^{(1)}$ dan diberikan $x^{(2)}$ untuk menduga nilai yang hilang. Sehingg:

$$\tilde{x}_j^{(1)} = E\left(X_j^{(1)} \middle| x_j^{(2)}; \tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}\right)$$
$$= \tilde{\mu}^{(1)} + \tilde{\Sigma}_{12}\,\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\left(x_j^{(2)} - \tilde{\mu}^{(2)}\right) \tag{2.12}$$

Memprediksi kontribusi $x_j^{(1)}$ untuk T_1 :

$$\overline{x_j^{(1)} x_j^{(1)}} = E\left(X_j^{(1)} X_j^{(1)'} \middle| x_j^{(2)}; \tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}\right)$$
$$= \tilde{\Sigma}_{11} - \tilde{\Sigma}_{12}\,\tilde{\Sigma}_{22}^{-1}\,\tilde{\Sigma}_{21} + \tilde{X}_j^{(1)}\tilde{X}_j^{(1)'} \tag{2.13}$$

$$\overline{x_j^{(1)} x_j^{(2)}} = E\left(X_j^{(1)} X_j^{(2)'} \middle| x_j^{(2)}; \tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}\right)$$
$$= \tilde{x}_j^{(1)}\tilde{x}_j^{(2)'} \tag{2.14}$$

Memprediksi kontribusi $x_j^{(1)}$ untuk T_2 :

Kontribusi pertama dijumlahkan untuk setiap x_j dengan komponen yang hilang. Hasil ini digabungkan dengan data sampel menghasilkan T_1 dan T_2 Menentukan matriks T_1 dan T_2 menggunakan rumus :

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} + x_{21} + x_{31} + \tilde{x}_{41} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \tilde{x}_{42} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} \overline{x_{11}^2} + x_{21}^2 + x_{31}^2 + \overline{x_{41}^2} & & \\ \overline{x_{11}x_{12}} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} + \overline{x_{41}x_{42}} & x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 + \overline{x_{42}^2} & \\ \overline{x_{11}x_{13}} + x_{21}x_{23} + x_{31}x_{33} + \overline{x_{41}x_{43}} & x_{12}x_{13} + x_{22}x_{23} + x_{32}x_{33} + \overline{x_{42}x_{43}} & x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{33}^2 + x_{43}^2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

2. Tahap Maksimisasi atau *Maximization Step* (M Step)

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{T}_1}{n} \tag{2.17}$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{n}\tilde{T}_2 - \tilde{\mu}\tilde{\mu}' \tag{2.18}$$

2.8 Uji χ^2

Uji χ^2 adalah pengujian hipotesis mengenai perbandingan antara frekuensi observasi / yang benar-benar terjadi dengan frekuensi harapan / ekspektasi. Nilai χ^2 adalah nilai kuadrat. Oleh karena itu nilai χ^2 selalu positif. Uji χ^2 digunakan untuk menunjukkan apakah ada pengaruh data hilang terhadap nilai awal dalam sebuah data. Pendekatan hipotesisnya :

$H_0 : \mu = \tilde{\mu}$

$H1 : \mu \neq \tilde{\mu}$

Jika terjadi penolakan $H_0 : \mu = \tilde{\mu}$ menyatakan bahwa terdapat pengaruh data hilang terhadap nilai awal. Taraf nyata pengujian yang digunakan adalah $\alpha = 5\%$. Kemudian dibandingkan dengan niai hitung dengan rumus :

$$n(\tilde{\mu} - \mu)' \, \tilde{\Sigma}^{-1} (\tilde{\mu} - \mu) \leq \chi_p^2(\alpha) \tag{2.19}$$

Untuk menguji hipotesis nol $\left(H_0\right)$ lawan hipotesis $\left(H_1\right)$. Bila nilai hitung lebih besar dari nilai tabel $\chi^2\ (F_{hitung} > F_{tabel})$ maka tolak H_0 dan begitu juga sebaliknya.