BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

2.1.1 Definisi Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks bermacam besarnya, yang dijelaskan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal).

2.1.2 Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh 2.1

Diberikan matriks $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ maka $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

karena $A = A^T$,maka matriks A adalah matriks simetris.

2.2 Bentuk kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik yaitu:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

dengan matrik $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, Ax \in \mathbb{R}^n$ entri matriks A yaitu matriks simetris, dengan $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j. Kemudian untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n\ ]$ maka persamaan (2.1) dapat diuraikan menjadi:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2.$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan $i \leq j, j \leq n$ dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Contoh 2.2

Jabarkan persamaan berikut menjadi bentuk kuadratik:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} x_i x_j$$

Jawab :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{2} \{c_{i1} x_i x_1 + c_{i2} x_i x_2\} \\ &= c_{11} x_1 x_1 + c_{12} x_1 x_2 + c_{21} x_2 x_1 + c_{22} x_2 x_2 \\ &= c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{21} x_2 x_1 + c_{22} x_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sifat definit positif dan definit negatif dari bentuk kuadratik $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, secara lengkap diberikan pada uraian berikut, dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A.

Definisi 2.2 (Anton Rorres, 2005): Jika A matriks simetris berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari A matriks maka bentuk kudratik $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ memenuhi

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua *i*
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.

Selanjutnya jika nilai eigen tidak memenuhi keempat ketentuan diatas, maka $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ dikatakan *indefinite.* Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -2x_i x_j$ ke dalam bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit A.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -2x_i x_j \\ &= -2x_1x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2x_2x_2 \\ &= -2{x_1}^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2{x_2}^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$

$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$[(\lambda + 2)(\lambda + 2) - 4] = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$

Jadi, dari nilai eigen matriks A dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -2x_i x_j$ adalah semi definit negatif.

2.3 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, sebagai berikut.

Definisi 2.3 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,sebuah vektor $\bar{\mathbf{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik ekuilibrium, digunakan untuk memudahkan memahami definisi kestabilan sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan stabi ljika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ maka $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi kriteria kestabilan.

Contoh 2.4:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial berikut $\dot{x} = x$ dengan $x(0) = x_0$

Penyelesaian:

Selanjutnya diperoleh solusi sebagai berikut:

$$\dot{x} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

$$\ln x = t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga

$$\ln x - c = t$$

$$ln\, x - \ln x_0 = t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^t$$

$$x = x_0\, e^t$$

Jika diambil untuk $t \to \infty$ dan $x \to \infty$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = x$ tidak stabil karena setiap solusinya menuju ∞.

Contoh 2.5:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Persamaan dapat diuraikan menjadi $\dot{x}_1 = -2x_1$ dan $\dot{x}_2 = -x_2$, sehingga diperoleh solusi sebagai berikut:

Untuk $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -2dt$$

$$\ln x_1 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $=$ $\ln x_0$.

Sehingga

$$\ln x_1 - c = -2t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -2t$$

$$\ln \frac{x_1}{x_0} = -2t$$

$$\frac{x_1}{x_0} = e^{-2t}$$

$$x_1 = x_0\, e^{-2t}$$

Untuk $t \to \infty$ maka

$$x_1(t) = x_1(0). e^{-2\infty}$$

$$x_1(t) \to 0$$

Untuk $\dot{x}_1 = -2x_1$ maka dapat diperoleh solusinya adalah $x_1 = x_1(0). e^{-2t}$ dengan mengambil $t \to \infty$ maka solusi x_1 menuju nol.

Untuk $\frac{dx_2}{dt} = -x_2$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -dt$$

$\ln x_2 = -t + c$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga

$$\ln x_2 - c = -t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x_2}{x_0} = -t$$

$$\frac{x_2}{x_0} = e^{-t}$$

$$x_2 = x_0 \, e^{-t}$$

Untuk $t \to \infty$ maka

$$x_2(t) = x_2(0). e^{-\infty}$$

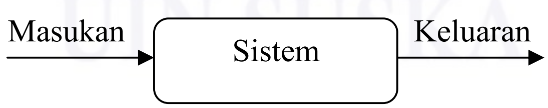
$$x_2(t) \to 0$$

Untuk $\dot{x}_2 = -x_2$ maka dapat diperoleh solusinya adalah $x_2 = x_2(0). e^{-t}$ dengan mengambil $t \to \infty$ maka solusi x_2 menuju nol.

Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

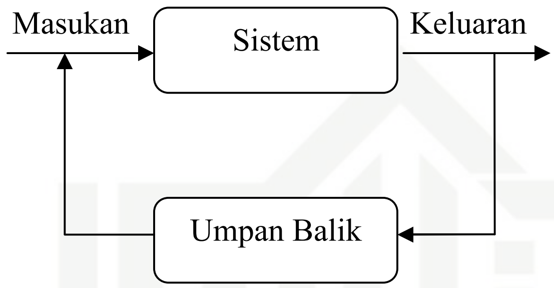
2.4 Sistem Kendali Optimal

Sistem kendali memiliki dua bagian yaitu sistem kendali lingkar terbuka *(open loop)* dan sistem kendali lingkar tertutup (*closed loop*). Sistem kendali lingkar terbuka *(open loop)* adalah sistem kontrol dimana keluaran tidak memberikan efek terhadap besaran masukan, sehingga variabel yang dikontrol tidak dapat dibandingkan terhadap nilai yang diinginkan. **(Ganda Samosir, 2003).**



Gambar 2.1 Sistem Loop Terbuka

Sedangkan sistem kendali lingkar tertutup (*closed loop*) adalah sistem pengendalian dimana besaran keluaran memberi efek terhadap besaran masukan sehingga besaran yang dikontrol dapat dibandingkan terhadap harga yang diinginkan melalui alat pencatat.



Gambar 2.2 Sistem Loop Tertutup

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali linear dengan *output* umpan balik.

2.5.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{2.3}$$

dengan $x \epsilon \mathbb{R}^n$ adalah vektor *state internal* dan $u \epsilon \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali input.

Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan

$$J(t_0) = \phi\left(\mathbf{x}\,(T_f), T_f\right) + \int_{t_0}^{T_f} L(\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t), t)dt, \tag{2.4}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka berdasarkan persamaan (2.3) dan (2.4) didefinisikan persamaan Hamilton sebagai berikut:

Persamaan Hamilton : $H(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = L(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),t) + \lambda^T(t)f(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),t)$ (2.5)

Persamaan *state* :$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.6)

Persamaan *kostate*: $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),t)}{\partial \mathbf{x}}(t),\ t \leq T_f.$ (2.7)

Persamaan *stasionar* : $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\mathbf{u}(\mathrm{t}),t)}{\partial \mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \mathbf{u}}\boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (2.8)

2.5.2 Kendali Lingkar Tertutup Linier Kuadratik

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkar tertutup didefinisikan persamaan dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \tag{2.9}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, dan meminimalkan fungsi objektif yaitu:

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})dt, \tag{2.10}$$

dengan t_0 waktu awal T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya dengan matriks Q dan $S(T_f)$ diasumsikan semi definit positif $(Q \geq 0,\ S(T_f) \geq 0)$ selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}Q\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif. Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\mathbf{u}^T R\mathbf{u} > 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan Aljabar Riccati sekaligus menentukan vektor kendali yang diperlukan untuk meminimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan (2.9) dan (2.10) diperoleh persamaan Hamilton sebagai berikut.

Persamaan Hamilton: $H(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (2.11)

Persamaan *state* $:\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t).$ (2.12)

Persamaan *kostate* $:-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = Q\mathbf{x}(t) + A^T\ \boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.13)

Persamaan *stasioner* : $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u}(t) + B^T\ \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})=0$ (2.14)

Berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh $\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.15)

Selanjutnya Persamaan (2.15) di substitusikan ke Persamaan (2.9) maka diperoleh:

$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(\mathrm{t}) - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}).$ (2.16)

Selanjutnya dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.13) maka dapat dibuat system homogen Hamilton yaitu:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(\mathrm{t})\\ \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})\end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\mathbf{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $\mathbf{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\mathbf{x}(t_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu:

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\ \Big|_{T_f} = S(T_f)\mathbf{x}(T_f), \quad (2.18)$$

Untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diasumsikan $\mathbf{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.18) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.19)$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.19) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S\dot{\mathbf{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.16) diperoleh:

$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S\dot{\mathbf{x}} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^TS\mathbf{x})$ (2.20)

Dari Pesamaan (2.7) didapat $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}.$ Selanjutnya, disubstitusikan Persamaan (2.20) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh:

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^TS\mathbf{x})$$

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^TS\mathbf{x} + Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda},\ \text{dimana: } \boldsymbol{\lambda} = S\mathbf{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^TS\mathbf{x} + Q\mathbf{x} + A^TS$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = (A^TS + SA - SBR^{-1}B^T\mathrm{S} + \mathrm{Q})\mathbf{x}.$$

$$-\dot{S} = A^TS + SA - SBR^{-1}B^T\mathrm{S} + \mathrm{Q}$$

$$\dot{S} = -A^TS - SA + SBR^{-1}B^T\mathrm{S} - \mathrm{Q}. \tag{2.21}$$

karena Persamaan (2.21) memenuhi untuk setiap waktu *t.*

Jika S adalah solusi untuk persamaan diferensial Riccati (2.21) maka dapat dibentuk fungsi kendali.

$$u(t) = -R^{-1}B^TS(t)\mathbf{x}(t). \tag{2.22}$$

Selanjutnya untuk menganalisa kestabilan persamaan diferensial dinamik maka disubstitusikan (2.22) ke Persamaan (2.9), diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\left(-R^{-1}B^TS(t)\mathbf{x}(t)\right),$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BR^{-1}B^TS(t))\mathbf{x}(t) \tag{2.23}$$

Persamaan (2.23) mencapai kestabilan jika $\left(A - BR^{-1}B^TS(t)\right) < 0$

2.5.3 Liniear Kuadratik Dengan Output Umpan Balik

Diberikan sistem dalam bentuk sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{2.24}$$

dengan persamaan *output* umpan balik yaitu:

$$y(t) = C\mathbf{x} \tag{2.25}$$

dimana $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ sebagai fungsi kendali, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sebagai *output* dengan matrik $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, selanjutnya diketahui kendali memenuhi:

$$u = Fy \tag{2.26}$$

dengan fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

$$J = x^TPx + \int_0^t (x^TQx + u^TRu)dt \tag{2.27}$$

dimana F adalah sebuah matriks $m \times p$

Berdasarkan Persamaan (2.26) maka Persamaan (2.24) dapat diubah menjadi:

$$\dot{x} = (A + BFC)x = A_c x \tag{2.28}$$

yang selanjutnya dari Persamaan (2.26) dan Persamaan (2.28) maka fungsi tujuan menjadi:

$$J = x^T P x + \int_0^t (x^T (Q + C^T F^T RFC)x)dt \tag{2.29}$$

Diasumsikan $J = 0$ sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(x^T Px\right) + x^T \left(Q + C^T F^T RFC\right)x \tag{2.30}$$

Sehingga di peroleh:

$$\frac{d}{dt}\left(x^T Px\right) = -x^T \left(Q + C^T F^T RFC\right)x$$

$$x^T Px + x^T Px = -x^T \left(Q + C^T F^T RFC\right)x$$

$$A_c^T P + PA_c + C^T F^T RCF + Q = 0 = g$$

Selanjutnya didefinisikan persamaan Hamilton sebagai berikut:

$$H = (Px) + (gS)$$

$$H = Px + (A_c^T P + PA_c + C^T F^T RFC + Q)S \tag{2.31}$$

dengan S adalah matriks simetri berukuran $n \times n$.

Berdasarkan persamaan Hamilton H pada persamaan (2.31), maka diperoleh Persamaan sebagai berikut:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial S} = g = A_c^T P + PA_c + C^T F^T RFC + Q \tag{2.32}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial P} = X + A_c^T S + A_c S \tag{2.33}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial F} = RFCSC^T + 2B^T PSC^T \tag{2.34}$$

Persamaan (2.32) dan (2.33) merupakan persamaan lyapunov. Jika R adalah matrik definit positif dan CSC^T bukan matrik singular, maka Persamaan (2.34) dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$0 = RFCSC^T + 2B^T PSC^T$$

$$RFCSC^T = -2B^TPSC^T$$

$$FCSC^T = \frac{-2B^TPSC^T}{R}$$

$$F = -2R^{-1}2B^TS(CSC^T)^{-1} \tag{2.35}$$

sehingga persamaan (2.26) menjadi:

$$u = Fy$$

$$u = -2R^{-1}2B^TS(CSC^T)^{-1}y \tag{2.36}$$

Dari persamaan (2.36) disubstitusikan kepersamaan (2.25) sehingga diperoleh:

$$\dot{x} = Ax + B(-2R^{-1}2B^TS(CSC^T)^{-1}Cx)$$

$$\dot{x} = (A - 2R^{-1}2BB^TS(CSC^T)^{-1}C)x \tag{2.37}$$

Berdasarkan **(Engwerda, 2005)** diperoleh bahwa Persamaan (2.37) akan stabil jika $(A - 2R^{-1}2BB^TS(CSC^T)^{-1}C) < 0$.

2.5.4 Linier Kuadratik dengan Umpan Balik dan Penambahan *Disturbance*

Diberikan sistem dalam bentuk sebagai berikut

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + Ed(t) \tag{2.38}$$

dengan persamaan *output* umpan balik yaitu:

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.39}$$

dimana $d(t)$ adalah *disturbance,* $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n, E \in \mathbb{R}^{n\times m}, \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ sebagai fungsi kendali serta $y(t) \in \mathbb{R}^p$ persamaan *output* dan $\boldsymbol{u}(t) = Fx(t)$ maka Persamaan (2.38) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) + Ed(t)$$

atau

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Ed(t) \tag{2.40}$$

Berdasarkan M. Nizam Kamarudin dkk (2012) dalam mempermudah perhitungan maka nilai *disturbance d(t)* di eliminasi pada tahap penyelesaian aljabar *Riccati*-nya sehingga penyelesaian dari Persamaan (2.40) adalah:

$$x(t) = e^{(A+BF)t}x(0) + \int_0^t e^{(A+BF)(t)}Ed(t)dt \tag{2.41}$$