BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui (Waluya, 2006).

Contoh 2.1 : Diberikan persamaan diferensial

1. $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$

Jika suatu persamaan diferensial hanya memiliki satu variabel bebas, turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, turunannya merupakan turunan parsial dan persamaannya disebut persamaan diferensial parsial. Contoh 2.1 nomor 1 merupakan persamaan diferensial biasa karena memiliki satu variabel bebas yaitu x, sedangkan Contoh 2.1 nomor 2 disebut persamaan diferensial parsial karena memiliki dua variabel bebas yaitu x dan y.

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Di bawah ini diberikan sistem persamaan diferensial yang linear dan nonlinear yang didefinisikan sebagai berikut:

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f_i adalah fungsi kontinu pada E, dengan $i = 1,2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistem (2.1) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

Sistem (2.1) dikatakan linear jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing–masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Jadi Sistem (2.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned} \tag{2.3}$$

Selanjutnya Sistem (2.3) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2.4}$$

dengan A matriks ukuran $n \times n$, dan $\boldsymbol{x} \in E$.

Contoh 2.2 Diberikan sistem persamaan diferensial linier

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2$$

Jadi Contoh 2.2 disebut linier karena dapat dibentuk kedalam Persamaan (2.4) sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

Persamaan (2.2) disebut sistem nonlinier jika sistem tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.3).

Contoh 2.3 Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1x_2 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1^2 - x_2$$

Jadi Contoh 2.3 tidak dapat dibentuk ke dalam Persamaan (2.4) karena tidak terdapat matriks A yang memenuhi Contoh 2.3 tersebut.

2.1.1 Titik Ekuilibrium

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik ekuilibrium endemik artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit. Titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium dari Sistem (2.2) didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.(Perko, 1991) Titik $\bar{\boldsymbol{x}} = R^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.2) jika $f(\bar{x}) = 0$

Berikut diberikan contoh mengenai Definisi 2.1

Contoh 2.4 Diberikan sistem persamaan diferensial yaitu

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1x_2 + x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = {x_1}^2 + x_2$$

Tentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial diatas.

Penyelesaian.

Titik ekuilibrium dari sistem persamaan diatas dapat diperoleh jika $f(\bar{x}) = 0$

Sehingga sistem tersebut menjadi

$$x_1x_2 + x_1 = 0$$

Atau dapat ditulis dengan

$$x_1(x_2 + 1) = 0$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh $\bar{x}_1 = 0$ atau $\bar{x}_2 = -1$

Jika $\bar{x}_1 = 0$, maka untuk persamaan $x_1^{\ 2} + x_2 = 0$ diperoleh $x_2 = 0$ sehingga didapat titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)^T$.

Jika $\bar{x}_2 = -1$, maka untuk persamaan $x_1^{\ 2} + x_2 = 0$ diperoleh $x_1 = 1$ sehingga didapat titik ekuilibrium $E_1 = (-1,1)^T$.

2.1.2 Matriks Jacobian

Sifat kestabilan titik ekuilibrium sistem nonlinier dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik $\bar{x}$.

Definisi 2.2.(Perko, 1991) Diberikan fungsi $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pada Sistem (2.2) dengan $f_i \in C'(E, R), i = 1,2, \ldots n$

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Matriks diatas dinamakan matriks jacobian dari $\boldsymbol{f}$ di titik $\bar{x}$.

Setelah ditentukan matriks Jacobian, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya.

Berikut definisi mengenai metode linearisasi :

Definisi 2.3.(Perko,1991) Diberikan matriks jacobian $J\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$ pada Sistem (2.5). Sistem linier $\dot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}$ disebut linierisasi Sistem (2.2) disekitar titik $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada Sistem (2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dan matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada Sistem (2.1) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini:

Teorema 2.1(Hale, 1991)

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dari Sistem (2.1) stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dari Sistem (2.1) tidak stabil.

Di bawah ini diberikan definisi formal mengenai kestabilan titik ekuilibrium :

Definisi 2.4.(Hale, 1991) Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}} \in R^n$ dari Sistem (2.1) dikatakan :

a) Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.1) $\boldsymbol{x}(t)$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka berakibat $\|\boldsymbol{x}(t) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.

b) Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $\boldsymbol{x}(t)$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \overline{\boldsymbol{x}}$.

c) Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}} \in R^n$ tak memenuhi *(a).*

2.1.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Teorema 2.2. (R. J. Iswanto, 2012) Diberikan persamaan karakteristik $\mathbf{P}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ dengan:

$$P(\lambda) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0,\ c_0 > 0$$

$$c_1 > 0,\ c_1c_2 > 0 \text{ untuk } n = 2$$

$$c_3 > 0,\ c_1 > 0,\ c_1c_2 > c_0c_3 \text{ untuk } n = 3$$

$$c_1 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0, c_1c_2 > c_0c_3, c_3(c_1c_2 - c_0c_3) > c_1^2c_4 \text{ untuk } n = 4$$

Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

Contoh 2.5 Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2$$

Penyelesaian

$$J\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

dengan,

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$$
$$f_2(x_1, x_2) = 3x_2 - 2x_2$$

Kemudian ditentukan terlebih dahulu turunan dari masing-masing fungsi terhadap variabelnya, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -2$$
$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 3 \quad \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -2$$

Dari turunan yang telah diperoleh kemudian dibentuk ke dalam matriks jacobian. Sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$J\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas

$$det(\lambda I - Jf(x_1, x_2)) = 0$$
$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) - (-3)(2) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 6 = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$$

Misalkan :

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$ dan $c_2 = 4$

Maka persamaan karakteristik di atas menjadi :

$$c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0$$

Karena $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ dan $c_1 c_2 > 0$ memenuhi keriteria Routh - Hurwitz untuk $n = 2$. Berdasarkan Teorema 2.1 (R. J. Iswanto, 2012) maka titik ekuilibrium dari $J\boldsymbol{f}(x_1, x_2)$ adalah stabil asimtotik lokal.

2.1.4 Nilai Eigen dari Suatu Matriks

Berikut diberikan definisi untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.5. (Anton, 2004) Diberikan matriks A ukuran $n\ x\ n$. vektor tak nol $x \in R^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A.

Definisi 2.6. (Anton, 2004) Polinomial karakterisktik dari A didefinisikan sebagai $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Persamaan $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari nilai eigen, dan λ merupakan akar karakteristik.

Contoh yang berkaitan dengan definisi diatas adalah sebagai berikut

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

Penyelesaian.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Determinan dari persamaan di atas adalah

$$\det(\lambda I - A) = \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$

Menurut definisi,

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan nontrivial dari persamaan $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$. Akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Jika λ = 1 maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Apabila persamaan diatas ditulis dalam bentuk sistem persamaan menjadi

$$\begin{aligned}-2x_1 - 2x_2 &= 0\\ x_1 + x_2 &= 0\end{aligned}$$

dengan menyelesaikan sistem persamaan diatas, diperoleh penyelesaian yaitu $x_1 = -x_2$. Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = -t$ sehingga,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jika $\lambda = 2$, maka untuk persamaan

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Menjadi,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

dengan menyelesaikan sistem persamaan diatas, maka diperoleh penyelesaiannya yaitu $x_1 = -2x_2$. Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = -2t$ sehingga,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.2 Model SEI *(Susceptible, Exposed, Infected)*

Kermack dan McKendrick (1927) merupakan orang yang pertama kali menggunakan model matematika epidemi untuk menganalisis peyebaran penyakit. Model yang dikenalkan adalah model SIR. Kemudian model SIR dapat dimodifikasi menjadi berbagai bentuk model matematika epidemi. Salah satunya adalah model epidemi SEI (*Susceptible*, *Exposed*, *Infected*). Model SEI telah banyak diterapkan dalam berbagai jurnal dan tugas akhir, salah satunya terdapat dalam jurnal Li dan Zhen (2004) yang membahas tentang epidemik SEI.

Penularan penyakit menular dalam suatu populasi dapat dimodelkan dengan menggunakan model SEI. Pada model SEI, populasi dibagi menjadi 3 sub-populasi yaitu $S(t)$ populasi yang rentan, $E(t)$ populasi yang terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda terjangkitnya penyakit, serta $I(t)$ populasi yang sudah terjangkit penyakit. Masing-masing populasi tersebut secara berurutan dinotasikan sebagai S, E, dan I dengan total populasi dari model tersebut adalah $N = S + E + I$.

Perubahan populasi dalam bentuk S (*Susceptible*) bergantung terhadap banyaknya individu yang masuk kedalam populasi *Susceptible* tersebut, banyaknya individu yang terinfeksi karena berinteraksi dengan individu pada populasi *Exposed* dan *Infected* serta banyaknya individu yang meninggal secara alami. Perubahan populasi dalam kelompok E (*Exposed*) bergantung terhadap banyaknya populasi yang terinfeksi karena berinteraksi dengan populasi pada kelompok *Exposed* dan *Infected*, banyaknya perpindahan populasi yang telah sakit dan banyaknya populasi yang meninggal secara alami serta banyaknya populasi yang meninggal karena telah terinfeksi penyakit. Perubahan populasi dalam kelompok I (*Infected*) bergantung terhadap banyaknya individu yang telah sakit, banyaknya perpindahan individu yang dikarantina, banyaknya individu yang meninggal secara alami serta banyaknya individu yang meninggal karena sakit.

Secara umum, model SEI dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \lambda_1 \frac{S}{N} E - \lambda_2 \frac{S}{N} I - \mu S,$$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda_1 \frac{S}{N} E + \lambda_2 \frac{S}{N} I - \gamma E - (\mu + \alpha_1) E,$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - kI - (\mu + \alpha_2) I$$

μ adalah peluang kematian alami, α_1 dan α_2 adalah peluang kematian karena terinfeksi penyakit, γ adalah peluang individu *exposed* menjadi *infected*, k adalah peluang individu yang dikarantina, k disini adalah konstan, A adalah penambahan individu *susceptible* secara konstan per satuan waktu, dan λ_1, λ_2 adalah peluang penularan antar individu yang saling berhubungan (Li dan Zhen, 2004).