BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Flu Singapura

Penyakit Flu Singapura atau dalam bahasa kedokteran disebut sebagai penyakit *Hand, Foot and Mouth Disease* (HFMD) merupakan penyakit infeksi yang seringkali menyerang anak-anak usia 2 minggu sampai 5 tahun (bahkan hingga 10 tahun). Orang dewasa umumnya kebal terhadap penyakit yang mempunyai masa inkubasi 2-5 hari ini. HFMD disebabkan oleh *Coxsackievirus A* type 16 (*CV A*16) dengan bermacam-macam strain, yaitu *Coxsackievirus A*5, *A*7, *A*9, *A*10, *B*2 dan *B*5 (Roy, 2010).

Gejala-gejala yang timbul untuk terserang penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot and Mouth Disease*) antara lain, demam selama 2-3 hari, disertai tidak ada nafsu makan, pilek dan gejala seperti flu pada umumnya. Selanjutnya, akan muncul sariawan (pada lidah, gusi, pipi sebelah dalam) dan timbul ruam ditangan dan kaki (Eminugroho, 2012).

Penularan penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot and Mouth Disease*) ini melalui kontak langsung dari orang ke orang yaitu melalui droplet (partikel kecil yang dihasilkan ketika seseorang batuk/bersin), pilek dan air liur. Penularan melalui kontak tidak langsung juga mungkin terjadi, misalnya penggunaan handuk, baju, peralatan makan dan mainan secara bersama-sama. Biasanya penyakit ini muncul pada musim panas (CDC, 2012).

Selang waktu dimana individu terinfeksi sampai munculnya penyakit (masa inkubasi) untuk penyakit flu singapura adalah 2 sampai 5 hari, setelah melewati periode laten/ masa inkubasi, individu dengan flu singapura tersebut dapat menginfeksi individu lainnya. Anak-anak yang terserang penyakit ini bisa sembuh, tetapi dapat terinfeksi kembali dengan strain virus yang berbeda. Namun, jika terjadi komplikasi dapat menyebabkan radang selaput otak dan radang otot jantung yang mengarah pada kematian.

2.2 Model Epidemi SIR

Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh W.O.Kermack dan Mc.Kendrick dalam makalahnya yang berjudul "*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*", yang kemudian muncul dalam Proceding Royal Society London halaman 700-721 tahun 1927, dan kemudian menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi. Model SIR menggambarkan tiga kompartemen yaitu kompartemen populasi rentan (*susceptible*), kompartemen populasi terinfeksi (*infected*) dan kompartemen populasi sembuh (*recovered*). Total jumlah populasi N diasumsikan konstan karena pengaruh kelahiran, kematian maupun migrasi tidak diperhatikan. Oleh karena itu, $S + I + R = N$.

Kompartemen untuk model SIR dapat dilihat pada gambar dibawah ini:

$$\boxed{S} \xrightarrow{\beta SI} \boxed{I} \xrightarrow{\alpha I} \boxed{R}$$

Gambar 2.1 Kompartemen Model SIR

Sehingga model matematika untuk model SIR adalah:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \qquad (2.1) \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

Pada model SIR dapat diasumsikan perubahan individu terinfeksi dan *susceptible* terjadi dengan laju proporsional terhadap jumlah populasi. Laju perubahan individu terinfeksi baru didefinisikan sebagai $\beta SI - \alpha I$, dengan β merupakan nilai laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *infected*. Laju perubahan individu terinfeksi dapat kembali sembuh didefinisikan sebagai αI dengan α merupakan nilai laju penyembuhan (Iswanto, 2012).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri dari 2 atau lebih persamaan diferensial.

Diberikan Sistem persamaan diferensial :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $f_i : E \subseteq R^n \to R^n$, $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, $i = 1,2,\ldots,n$, dan $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$.

Diberikan pula kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1,2,\ldots,n$, Sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, $f_i : E \subset R^n \to R$, f_i

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E \subseteq R^n, \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T ; \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)^T$$

dengan syarat awal $x_i(t_0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0}) = x_0$

Sistem (2.3) dikatakan linier jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ masing-masing linier dalam $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Jadi Sistem (2.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Selanjutnya Sistem Persamaan (2.4) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2.5}$$

dengan A matrik ukuran $n \ x \ n$, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \quad \boldsymbol{x} \in E$.

Sistem (2.2) disebut Sistem persamaan differensial nonlinier, jika Sistem tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.4). Solusi Sistem (2.2) diberikan oleh defenisi dibawah ini:

Definisi 2.1 **(**Perko, 1991) Diberikan $E \subseteq \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{E}$ himpunan terbuka, dan $\boldsymbol{f}_i \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \cdots, \boldsymbol{n}$. Vektor $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}^n$ disebut penyelesaian Sistem (2.2) pada interval I jika $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ diferensial pada I dan $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))$ untuk setiap $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$ dan $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{E}$.

Contoh 2.1: Diberikan persamaan diferensial linier

1. $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$

Jika suatu persamaan diferensial hanya memiliki satu variabel bebas, turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Tetapi jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, turunannya merupakan turunan parsial dan persamaannya disebut persamaan diferensial parsial. Dari contoh 2.1 nomor 1 merupakan persamaan diferensial biasa karena memiliki satu variabel bebas yaitu x, sedangkan untuk nomor 2 disebut persamaan diferensial parsial karena memiliki dua variabel bebas yaitu x dan y.

Contoh 2.2: Diberikan sistem persamaan diferensial linier

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2$$

maka Sistem persamaan diferensial linier diatas dapat dibentuk ke dalam Persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diberikan contoh Sistem persamaan diferensial non linier ditulis kedalam persamaan (2.5).

Contoh 2.3: Diberikan Sistem persamaan diferensial nonlinier

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1x_2 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1^2 - x_2$$

maka Sistem persamaan diferensial nonlinier diatas dapat dibentuk ke dalam persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 & -1 \\ \frac{1}{2}x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2.4 Nilai Eigen

Definisi 2.2 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks $n \ x \ n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n dinamakan vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$ yakni:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{2.6}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari A dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ**.**

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \ x \ n$ maka kita menuliskan kembali $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ sebagai berikut:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x},$$

atau secara ekivalen:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.7}$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Persamaan di atas akan mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dinamakan persamaan karakteristik A.

Contoh 2.4

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & -\lambda \end{bmatrix},$$

maka polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dengan menggunakan metode sarrus, sehingga diperoleh persamaan karekteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [(-\lambda)(-\lambda)(8-\lambda)+(1)(1)(4)]-[(-\lambda)(1)(-17)] &= 0 \\ -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 &= 0 \\ \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 &= 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh $\lambda_1 = 4$,

untuk λ_2 dan λ_3 diperoleh dengan rumus kuadrat sebagai berikut:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Jadi, nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

2.5 Matriks Jacobi

Definisi 2.3 (Kelley dan Peterson, 2010) Matriks Jacobian J dari sistem persamaan:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

yaitu matriks yang berukuran $m \; x \; n$. Matriks ini sering kali juga ditulis sebagai matriks x:

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j} \tag{2.9}$$

dan disebut matriks Jacobian (Radhianti, 2012).

Untuk lebih jelasnya lihat contoh di bawah ini.

Contoh 2.5

Tentukan matriks Jacobian dari sistem persamaan berikut:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3$$
$$f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2$$
$$f_3(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^2$$

Penyelesaian:

Maka matriks Jacobiannya adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & -3x_2^2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 \\ 2x_2^2 & 4x_1x_2 \end{bmatrix}$$

2.6 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar dinotasikan dengan $\boldsymbol{R_0}$ merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefenisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung (Driessche dan Atmough, 2008). Sedangkan menurut Rost dan Wu (2008), teorema tentang bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

Teorema 2.1

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit (*disease free equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika $\boldsymbol{R_0} < 1$ dan tidak stabil jika $\boldsymbol{R_0} > 1$
2. Jika $\boldsymbol{R_0} < 1$ maka semua solusi konvergen ke titik ekuilibrium bebas penyakit (*disease free equilibrium*).
3. Titik ekuilibrium endemik (*endemic equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika $\boldsymbol{R_0} > 1$
4. Jika $\boldsymbol{R_0} > 1$ maka penyakit tersebut endemik.

2.7 Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu (Panvilov, 2004). Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik ekuilibrium endemik artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium Sistem persamaan (2.2).

Definisi 2.4 (Perko, 2001: 102) Titik $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari Sistem (2.3) jika $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$.

Contoh 2.6

Diberikan sistem persamaan diferensial yaitu:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Tentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial diatas.

Penyelesaian. Titik ekuilibrium dari sistem persamaan diatas dapat diperoleh jika $f(x) = 0$**,** sehingga sistem tersebut menjadi

$$x_1 x_2 + x_1 = 0$$

atau dapat ditulis menjadi

$$x_1(x_2 + 1) = 0$$

Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh $\bar{x}_1 = 0$ atau $\bar{x}_2 = -1$**.**

Jika $\bar{x}_1 = 0$ dan menurut persamaan

$$x_1^2 + x_2 = 0,$$

maka, diperoleh $x_2 = 0$ sehingga didapat titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)^T$.

Jika $\bar{x}_2 = -1$ dan menurut persamaan

$$x_1^2 + x_2 = 0,$$

maka, diperoleh $\bar{x}_2 = -1$ sehingga didapat titik ekuilibrium $E_2 = (1,-1)^T$.

Selanjutnya akan diberikan definisi kestabilan di titik ekuilibrium.

Definisi 2.5 (Strogatz, 1994) Misalkan diberikan SPD linier sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2.10}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Maka persamaan karakteristik SPD di atas, yaitu $(A-\lambda I)\mathbf{x}=0$, dapat ditulis menjadi:

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0\,, \tag{2.11}$$

maka dari persamaan di atas diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.12}$$

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks jacobian. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium dapat disajikan pada teorema berikut:

Teorema 2.2 (Hale, 1991)

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real negative, maka titik ekuilibrium x^* dari Sistem 2.1 stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium x^* dari Sistem 2.1 tidak stabil.

Contoh 2.7

Diberikan persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2$$

dengan titik ekuilibrium:

$$\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 = 0 \\ \underline{2x_1 - 3x_2 = 0} \; - \\ -2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}$$

diperoleh $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{f_1}}{\partial \boldsymbol{x_1}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{f_1}}{\partial \boldsymbol{x_2}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{f_2}}{\partial \boldsymbol{x_1}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{f_2}}{\partial \boldsymbol{x_2}} \end{bmatrix}$$

dengan $f_1(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2$ dan $f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$

kemudian ditentukan terlebih dahulu turunan dari masing-masing fungsi terhadap variabelnya, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -2 \qquad \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2 \qquad \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -3$$

Turunan yang telah diperoleh kemudian dibentuk kedalam matriks jacobian sebagai berikut:

$$Jf_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks diatas

$$\det(\lambda I - Jf_1(x_1, x_2)) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) - (-2)(-1) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda + 6 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -1$$

Dari contoh diatas dapat dilihat nilai eigen (λ_1, λ_2)dari matrik jacobian $Jf(x_1, x_2)$ mempunyai bagian real negative. Berdasarkan Teorema 2.2 (Hale, 1991) (a) maka titik ekulibrium $(0,0)$ adalah stabil asimtotik.

2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dipakai apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit ditentukan. Karena kriteria kestabilan Routh-Hurwitz ini tidak melihat tanda bagian real dari nilai eigen atau akar-akar persamaan karakteristik secara langsung melainkan melihat koefisien dari persamaan karakteristik.

Teorema 2.3 (**Risya Radhianti, 2012)** Diberikan persamaan karakteristik:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_k = 0. \qquad (2.13)$$

Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk k=2,3,4, disebut bahwa titik ekuilibrium stabil jika dan hanya jika:

$k = 2$ $\quad a_1 > 0, a_2 > 0,$

$k = 3$ $\quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3,$

$k = 4$ $\quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1a_2a_3 > a_3{}^2 + a_1{}^2a_4.$

Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

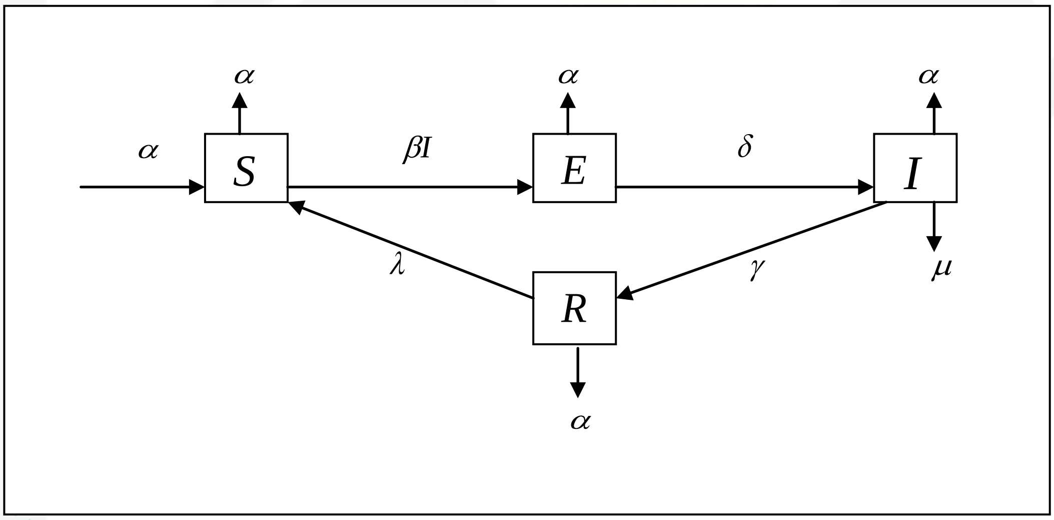
2.9 Model Epidemi SEIRS

Model SIR dapat dimodifikasi menjadi berbagai bentuk model epidemik. Untuk penyakit flu singapura kompartemen E (*exposed*) untuk populasi yang terinfeksi tetapi belum dapat menunjukkan gejala-gejala penyakit. Model SEIRS populasi dibagi menjadi 4 (empat) kompartemen yaitu kompartemen populasi rentan (*susceptible*), kompartemen populasi laten (*exposed*), kompartemen populasi terinfeksi (*infected*), dan kompartemen populasi sembuh (*recovered*) (Eminugroho, 2012).

Untuk model SEIRS penyebaran penyakit flu singapura diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi bersifat tertutup, artinya tidak terjadi migrasi pada populasi.
b. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
c. Jumlah populasi konstan.
d. Laju kematian alami untuk tiap kompartemen α.
e. Laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *exposed* β.
f. Laju transisi dari kompartemen *exposed* ke *infected* δ.
g. Laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered* γ.
h. Laju transisi dari kompartemen *recovered* ke *exposed* λ.

Kompartemen untuk model SEIRS dapat dilihat pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.2 Kompartemen Model SEIRS Penyebaran Penyakit Flu Singapura

Sehingga model matematika untuk model SEIRS adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \alpha S + \lambda R \qquad S(0) > 0 \qquad (2.14.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \alpha E - \delta E \qquad E(0) \geq 0 \qquad (2.14.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \alpha I - \mu I - \gamma I \qquad I(0) \geq 0 \qquad (2.14.c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \lambda R - \alpha R \qquad R(0) \geq 0 \qquad (2.14.d)$$

dengan jumlah keseluruhan populasi:

$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1, \alpha > 0, \delta > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \gamma > 0$.

Persamaan (2.14.a) sampai dengan persamaan (2.14.d) disebut sebagai sistem (1).

Tabel 2.1 Keterangan Parameter Variabel

Parameter Variabel	**Keterangan**
S	Jumlah individu yang rentan terhadap penyakit
E	Jumlah individu yang sudah terinfeksi tapi belum menunjukkan gejala penyakit
I	Jumlah individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit
R	Jumlah individu yang sembuh dan rentan terkena penyakit
β	Laju individu yang terinfeksi namun belum menunjukkan gejala
α	Laju kelahiran dan kematian alami untuk tiap kompartemen
γ	Laju individu yang sembuh
δ	Laju individu yang terinfeksi
μ	Laju kematian karna penyakit
λ	Laju individu yang sembuh namun rentan terhadap penyakit

1. Titik Ekuilibrium

Berdasarkan sistem (1) dapat diperoleh 2 jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit yang dapat dijelaskan dalam lemma berikut.

Lemma 1. (Eminugroho, 2012)

(i) Jika $I = 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (1,0,0,0)$.

(ii) Jika $I \neq 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium endemik $P = \left(S^*, E^*, I^*, R^*\right)$.

Dengan:

$$S^* = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}{\beta\delta}$$

$$E^* = \frac{(\alpha+\mu+\gamma)}{\delta} I^*$$

$$I^* = \frac{\alpha\beta\delta - \alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta} \cdot \frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) - \delta\lambda\gamma}$$

$$R^* = \frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)} I^*$$

Bukti:

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit berarti di dalam populasi tidak ada individu yang dapat menyebarkan penyakit flu singapura atau tidak ada individu yang terserang penyakit flu singapura. Sehingga untuk titik ekuilibrium bebas penyakit pada model epidemik SEIRS dinotasikan dengan $\bar{I} = 0$ dengan $\frac{dS}{dt} = 0$ $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$.

Titik ekuilibrium bebas penyakit untuk *susceptible* $(\bar{S})$ diperoleh dari $\frac{dS}{dt} = 0$, pada Persamaan (2.14.a) sebagai berikut:

$$\alpha - \beta SI - \alpha S + \lambda R = 0$$

$$\alpha - \beta S(0) - \alpha S + \lambda(0) = 0$$

$$\alpha - \alpha S = 0$$

$$\alpha = \alpha S$$

$$S = 1$$

Jadi, diperoleh nilai untuk *susceptible* $(\bar{S})$ adalah:

$$\bar{S} = 1 \tag{2.15}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit untuk *exposed* $(\bar{E})$ diperoleh dari $\frac{dE}{dt}=0$, pada Persamaan (2.14.b) sebagai berikut:

$$\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I=0$$

$$\delta E-(\alpha+\mu+\gamma)I=0$$

$$\delta E=(\alpha+\mu+\gamma)I$$

$$E=\frac{(\alpha+\mu+\gamma)I}{\delta}$$

$$E=\frac{(\alpha+\mu+\gamma)}{\delta}(0)$$

$$E=0$$

diperoleh nilai untuk *exposed* $(\bar{E})$ yaitu:

$$\bar{E}=0 \tag{2.16}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit untuk *recovered* $(\bar{R})$ diperoleh dari $\frac{dR}{dt}=0$, pada Persamaan (2.14.c) sebagai berikut:

$$\gamma I-\lambda R-\alpha R=0$$

$$\gamma I-(\lambda+\alpha)R=0$$

$$\gamma I=(\lambda+\alpha)R$$

$$R=\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I$$

$$R=\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}(0)$$

$$R=0$$

diperoleh nilai untuk *recovered* $(\bar{R})$ yaitu:

$$\bar{R}=0 \tag{2.17}$$

Dari Persamaan (2.15) sampai Persamaan (2.17) didapat titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{R})=P_0(1,0,0,0)$ artinya, populasi bebas dari penyakit HFMD.

b. Titik ekuilibrium Endemik Penyakit

Titik ekuilibrium endemik untuk *exposed* $\left(E^*\right)$ dapat diperoleh dari $\frac{dI}{dt} \neq 0$, pada Persamaan (2.14.c) sebagai berikut:

$$\delta E - \alpha I - \mu I - \gamma I = 0$$

$$\delta E - (\alpha + \mu + \gamma) I = 0$$

$$\delta E = (\alpha + \mu + \gamma) I$$

diperoleh nilai untuk *exposed* $\left(E^*\right)$ yaitu:

$$E^* = \frac{(\alpha + \mu + \gamma)}{\delta} I^* \tag{2.18}$$

Titik ekuilibrium endemik untuk *recovered* $\left(R^*\right)$ dapat diperoleh dari $\frac{dR}{dt} = 0$, pada Persamaan (2.14.d) sebagai berikut:

$$\gamma I - \lambda R - \alpha R = 0$$

$$\gamma I - (\lambda + \alpha) R = 0$$

$$\gamma I = (\lambda + \alpha) R$$

diperoleh nilai untuk *recovered* $\left(R^*\right)$yaitu:

$$R^* = \frac{\gamma}{(\lambda + \alpha)} I^* \tag{2.19}$$

untuk $\frac{dE}{dt} = 0$, substitusikan Persamaan (2.18) ke Persamaan (2.14.b):

$$\beta SI - \alpha E - \delta E = 0$$

$$\beta S^* I^* = \alpha\left(\frac{(\alpha + \mu + \gamma)}{\delta} I^*\right) + \delta\left(\frac{(\alpha + \mu + \gamma)}{\delta} I^*\right)$$

$$\beta S^* I^* = \alpha\left(\frac{(\alpha + \mu + \gamma)}{\delta} I^*\right) + \left((\alpha + \mu + \gamma) I^*\right)$$

$$\beta S^* I^* = \frac{\alpha\left((\alpha + \mu + \gamma) I^*\right) + \delta\left((\alpha + \mu + \gamma) I^*\right)}{\delta}$$

$$\beta S^* I^* = \frac{I^*\left(\alpha(\alpha + \mu + \gamma) + \delta(\alpha + \mu + \gamma)\right)}{\delta}$$

$$S^* = \frac{\dfrac{I^*(\alpha(\alpha+\mu+\gamma)+\delta(\alpha+\mu+\gamma))}{\delta}}{\beta I^*}$$

$$S^* = \frac{(\alpha(\alpha+\mu+\gamma)+\delta(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}$$

diperoleh nilai untuk *Susceptible* (S^*) yaitu:

$$S^* = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}{\beta\delta} \tag{2.20}$$

untuk $\frac{dS}{dt}=0$, substitusikan Persamaan (2.20) dan (2.19) ke Persamaan (2.14.a):

$$\alpha - \beta SI - \alpha S + \lambda R = 0$$

$$\alpha - \beta\left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}\right)I^* - \alpha\left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}\right) + \lambda\left(\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I^*\right) = 0$$

$$\alpha - \left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\delta}\right)I^* - \alpha\left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}\right) + \lambda\left(\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I^*\right) = 0$$

$$\alpha - I^*\left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\delta} + \frac{\lambda\gamma}{(\lambda+\alpha)}\right) - \alpha\left(\frac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}\right) = 0$$

$$I^* = \frac{\alpha - \alpha\left(\dfrac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}\right)}{\left(\dfrac{((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\delta} + \dfrac{\lambda\gamma}{(\lambda+\alpha)}\right)}$$

$$I^* = \frac{\dfrac{\alpha\beta\delta - \alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta\delta}}{\dfrac{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\lambda\gamma}{\delta(\lambda+\alpha)}}$$

$$I^* = \frac{\alpha\beta\delta - \alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta} \cdot \frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\lambda\gamma}$$

diperoleh nilai untuk *infected* (I^*) yaitu:

$$I^* = \frac{\alpha\beta\delta - \alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta} \cdot \frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\lambda\gamma} \tag{2.21}$$

dari Persamaan (2.18) sampai Persamaan (2.21) diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$P\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}{\beta\delta},\frac{(\alpha+\mu+\gamma)}{\delta}I^*,\frac{\alpha\beta\delta-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta}\cdot\frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\lambda\gamma},\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I^*\right)$$

artinya Penyakit HFMD masih ada dalam populasi.

2. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit flu singapura, diperlukan parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar dan dinotasikan dengan (R_0). Nilai (R_0) diperoleh dengan cara berikut:

$$I^*>0$$

$$\frac{\alpha\beta\delta-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma))}{\beta}\cdot\frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\lambda\gamma}>0$$

$$\frac{(\lambda+\alpha)[\alpha\beta\delta-\alpha(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)(\lambda+\alpha)]}{\beta[(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\beta\delta\lambda\gamma]}>0$$

$$(\lambda+\alpha)\alpha\beta\delta>\alpha(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)(\lambda+\alpha)$$

karena $(\lambda+\alpha)\alpha\beta\delta>\alpha(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)(\lambda+\alpha)$ maka dapat didefenisikan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:

$$R_0=\frac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}$$

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian. Untuk menganalisis kestabilan pada titik ekuilibrium model SEIRS, pertama linierisasi pada model SEIRS, maka:

$$\begin{aligned}
f(S,E,I,R)&=\alpha-\beta SI-\alpha S+\lambda R\\
g(S,E,I,R)&=\beta SI-\alpha E-\delta E\\
h(S,E,I,R)&=\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I\\
i(S,E,I,R)&=\gamma I-\lambda R-\alpha R
\end{aligned}\tag{2.22}$$

dari Sistem Persamaan (2.22) di atas dilinierkan sehingga didapatkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{\partial(\alpha-\beta SI-\alpha S+\lambda R)}{\partial S}=-\beta I-\alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial E}=\frac{\partial(\alpha-\beta SI-\alpha S+\lambda R)}{\partial E}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial I}=\frac{\partial(\alpha-\beta SI-\alpha S+\lambda R)}{\partial I}=-\beta S$$

$$\frac{\partial f}{\partial R}=\frac{\partial(\alpha-\beta SI-\alpha S+\lambda R)}{\partial R}=\lambda$$

$$\frac{\partial g}{\partial S}=\frac{\partial(\beta SI-\alpha E-\delta E)}{\partial S}=\beta I$$

$$\frac{\partial g}{\partial E}=\frac{\partial(\beta SI-\alpha E-\delta E)}{\partial E}=-\alpha-\delta$$

$$\frac{\partial g}{\partial I}=\frac{\partial(\beta SI-\alpha E-\delta E)}{\partial I}=\beta S$$

$$\frac{\partial g}{\partial R}=\frac{\partial(\beta SI-\alpha E-\delta E)}{\partial R}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial S}=\frac{\partial(\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I)}{\partial S}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial E}=\frac{\partial(\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I)}{\partial E}=\delta$$

$$\frac{\partial h}{\partial I}=\frac{\partial(\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I)}{\partial I}=-\alpha-\mu-\gamma$$

$$\frac{\partial h}{\partial R}=\frac{\partial(\delta E-\alpha I-\mu I-\gamma I)}{\partial R}=0$$

$$\frac{\partial i}{\partial S}=\frac{\partial(\gamma I-\lambda R-\alpha R)}{\partial S}=0$$

$$\frac{\partial i}{\partial E}=\frac{\partial(\gamma I-\lambda R-\alpha R)}{\partial E}=0$$

$$\frac{\partial i}{\partial I}=\frac{\partial(\gamma I-\lambda R-\alpha R)}{\partial I}=\gamma$$

$$\frac{\partial i}{\partial R}=\frac{\partial(\gamma I-\lambda R-\alpha R)}{\partial R}=-\lambda-\alpha$$

Linierisasi yang telah dilakukan adalah matrik Jacobian J_1 sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial E} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial E} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial E} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial R} \\ \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial E} & \frac{\partial i}{\partial I} & \frac{\partial i}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Kemudian substitusikan linierisasi yang telah dilakukan ke matrik Jacobian:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\beta I - \alpha & 0 & -\beta S & \lambda \\ \beta I & -\alpha - \delta & \beta S & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha - \mu - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\lambda - \alpha \end{bmatrix}$$

a. Analisis Kestabilan di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Teorema 1 Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $P(1,0,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Bukti.

Titik kestabilan bebas penyakit $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R}) = (1,0,0,0)$ dievaluasi pada matrik jacobian sehingga didapat:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\beta(0) - \alpha & 0 & -\beta(1) & \lambda \\ \beta(0) & -\alpha - \delta & \beta(1) & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha - \mu - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\lambda - \alpha \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & -\beta & \lambda \\ 0 & -(\alpha + \delta) & \beta & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha + \mu + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda + \alpha) \end{bmatrix}$$

untuk mencari nilai eigen maka digunakan persamaan tersebut:

$$\det(kI - J_2) = 0\,,$$

maka persamaan karakteristik untuk matriks jacobian J_2 yang dievaluasi di titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{bmatrix} k+\alpha & 0 & \beta & -\lambda \\ 0 & k+(\alpha+\delta) & -\beta & 0 \\ 0 & -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha) \end{bmatrix}$$

jadi persamaan karakteristiknya adalah:

$$\begin{vmatrix} k+\alpha & 0 & \beta & -\lambda \\ 0 & k+(\alpha+\delta) & -\beta & 0 \\ 0 & -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan aturan kofaktor maka matriks diatas dapat dihitung sebagai berikut:

$$(k+\alpha)\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta & 0 \\ -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$(k+\alpha)(k+(\lambda+\alpha))\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta \\ -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

$$(k+\alpha)(k+(\lambda+\alpha))[(k+(\alpha+\delta))(k+(\alpha+\mu+\gamma))-\beta\delta] = 0 \qquad (2.23)$$

Berdasarkan Persamaan (2.23) diperoleh: $k_1 = -\alpha$, $k_2 = -(\lambda+\alpha)$. Dan dari Persamaan (2.23) dapat dilihat bahwa persamaan karakteristik untuk nilai eigen lainnya sebagai berikut:

$$k^2 + (2\alpha+\delta+\mu+\gamma)k + (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) - \beta\delta = 0$$

jadi didapat persamaan karakteristik yaitu:

$$k^2 + Ak + B = 0$$

dengan

$$A = 2\alpha+\delta+\mu+\gamma$$

$$B = (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) - \beta\delta.$$

Selanjutnya, didefenisikan $R_0 = \dfrac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}$, untuk mengetahui akar-akar negatif maka akan dibuktikan :

1) $A.B > 0$

2) $A + B < 0$

Bukti:

1) $$A.B = \frac{c}{a} = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\beta\delta}{1}$$

$$= \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)} \times (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)$$

$$= 1 - \frac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)} \times (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)$$

$$= (1-R_0) \times (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) > 0$$

karena $R_0 < 1$ maka $(1-R_0) > 0$ atau $(1-R_0)\times(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) > 0$

2) $$A + B = \frac{-b}{2} = \frac{-(2\alpha+\delta+\mu+\gamma)}{2}$$

karena $\dfrac{-b}{2} = \dfrac{-2\alpha-\delta-\mu-\gamma)}{2}$, maka menghasilkan $\dfrac{-b}{2} < 0$ jadi terbukti $A + B < 0$ Jadi, nilai eigen untuk persamaan karakteristik $k^2 + Ak + B = 0$ sebagai berikut:

$$k_3 = \frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2} \qquad k_4 = \frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

b. Analisis Kestabilan di Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Teorema 2 Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $P(1,0,0,0)$ stabil asimtotik.

Titik endemik (S^*, E^*, I^*, R^*) dievaluasi di matriks Jacobian, sehingga diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\beta I - \alpha & 0 & -\beta S & \lambda \\ \beta I & -\alpha-\delta & \beta S & 0 \\ 0 & \delta & -\alpha-\mu-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\lambda-\alpha \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk matrik Jacobian yang dievaluasi di titik ekuilibrium endemik adalah sebagai berikut:

$$J_2 = \begin{bmatrix} k+\left(\beta I^* + \alpha\right) & 0 & \beta S^* & -\lambda \\ -\beta I & k+(\alpha+\delta) & -\beta S^* & 0 \\ 0 & -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha) \end{bmatrix}$$

jadi persamaan karakteristiknya adalah:

$$\left(k+\left(\beta I^* + \alpha\right)\right)\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta S^* & 0 \\ -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha) \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$\left(k+\left(\beta I^* + \alpha\right)\right)\left(k+(\lambda+\alpha)\right)\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta S^* \\ -\delta & k+(\alpha+\mu+\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$k_1 = -\left(\beta I^* + \alpha\right)$

$k_2 = -(\alpha+\lambda)$

k_3 dan k_4 adalah akar-akar dari $k^2 + Ak + B = 0$ dengan $A = 2\alpha + \delta + \mu + \gamma$ dan

$B = (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) - \beta\delta S^*$

Selanjutnya, didefenisikan $R_0 = \dfrac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)}$, untuk mengetahui akar-akar negatif maka akan dibuktikan:

3) $A.B > 0$

4) $A + B < 0$

Bukti:

3) $A.B = \dfrac{c}{a} = (\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma) - \delta\beta S > 0$ $\qquad S = \dfrac{1}{R_0}$

$$(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\beta\frac{1}{R_0}>0$$

$$\frac{R_0(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\beta}{R_0}>0$$

$$R_0(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\beta>0$$

karena $R_0>1$ maka $R_0(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\beta>0$

Perhatikan bahwa $(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)-\delta\beta>0$. Oleh karena $(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)>2\delta\beta$ sehingga berlaku $(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)>2\delta\beta>\delta\beta$ sehingga diperoleh $R_0(\alpha+\delta)(\alpha+\mu+\gamma)>\delta\beta$ maka terbukti bahwa $A.B>0$.

4) $A+B=\frac{-b}{2}=\frac{-(2\alpha+\delta+\mu+\gamma)}{2}$

karena $\frac{-b}{2}=\frac{-2\alpha-\delta-\mu-\gamma}{2}$, maka menghasilkan $\frac{-b}{2}<0$ jadi terbukti $A+B<0$