BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang terdapat turunan atau diferensial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Sugiarto, 2015).

Contoh 2.1 : Diberikan persamaan diferensial

1. $\frac{dy}{dx} = 1 + y$.

Jika suatu persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa, yaitu turunan dengan satu variabel bebas maka disebut persamaan diferensial biasa. Contoh 1 merupakan persamaan diferensial biasa karena memiliki satu variabel bebas yaitu x.

Berdasarkan sifat kelinieran, persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linier dan diferensial biasa tidak linier. Suatu persamaan diferensial biasa linier dapat ditulis ke dalam bentuk berikut:

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^n = b. \tag{2.1}$$

Contoh 2.2 :

1. $y' = xy^2$, (tidak linier, karena terdapat pangkat 2 dari y).
2. $y' = \frac{1}{e^y}$, (tidak linier, karena terdapat fungi transenden e^y).
3. $yy' = 1$, (tidak linier, karena terdapat perkalian y dan y').

Dengan demikian, persamaan differensial biasa disebut linear, jika memenuhi kriteria berikut :

1. Variabel tak bebas dan turunannya paling tinggi berderajat satu.
2. Tidak terdapat fungsi transenden dalam bentuk variabel tak bebas.
3. Tidak terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

Persamaan diferensial yang tidak dapat dituliskan ke dalam bentuk Persamaan (2.1) atau tidak memenuhi kriteria diatas disebut persamaan diferensial tidak linier (Hendriana, 2002).

Sedangkan sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan n buah persamaan diferensial, dapat di tulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Selanjutnya Sistem (2.2) dapat ditulis dalam matriks berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}\,.$$

Jika sistem persamaan diferensial dapat ditulis ke dalam bentuk Sistem (2.2) maka disebut sistem persamaan diferensial linier. Jika sistem persamaan diferensial tidak dapat ditulis ke dalam bentuk Sistem (2.2) maka disebut sistem persamaan diferensial tidak linier.

2.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah solusi dari suatu sistem yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu (konstan) atau $\frac{dx_1}{dt} = 0,\ \frac{dx2}{dt} = 0, \cdots, \frac{dx_n}{dt} = 0.$ Titik kesetimbangan terbagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya di dalam suatu populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit $(I = 0)$. Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya di dalam suatu populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit $(I \neq 0)$.

Berikut diberikan definisi tentang kestabilan titik kesetimbangan :

Definisi 2.1 (Olsder, 2003) Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ dari Sistem (2.2) dikatakan :

1. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatankan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatankan stabil asimtotik jika titik kesetimbangannya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikan sehingga $\lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - x^*\| = 0$ asalkan $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$.
3. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (1).

2.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tidak linier dilakukan melalui pelinieran. Untuk mencari hasil pelinieran dari sistem persamaan diferensial tidak linier digunakan matriks Jacobian.

$$J\left(f\left(x^*\right)\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^*\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(x^*\right) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(x^*\right) \end{bmatrix}.$$

$J\left(f\left(x^*\right)\right)$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x^* (Allen, 2006).

Definisi 2.2 (Anton, 2004) Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks $n \times n$, maka suatu vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{R^n}$ disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, maka

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}. \tag{2.3}$$

untuk suatu skalar $\boldsymbol{\lambda}$. Skalar $\boldsymbol{\lambda}$ disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$, dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang terkait dengan $\boldsymbol{\lambda}$.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$, maka Persamaan (2.4) dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$, dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas atau secara ekivalen dapat ditulis :

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.5}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari Persamaan (2.5). Persamaan (2.5) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika :

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0. \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) disebut parsamaan karakteristik matriks $\boldsymbol{A}$.

Kestabilan dari titik kesetimbangan pada Sistem (2.6) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian. Kriteria kestabilan titik kasetimbangan pada Sistem (2.2) disajikan pada teorema berikut :

Teorema 2.1 (Hale, 1991) :

1. Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(x^*))$ mempunyai bagian *real* negatif, maka titik kesetimbangan x^* dari Sistem (2.2) stabil asimtotik.
2. Jika terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(x^*))$ mempunyai bagian *real* positif, maka titik kesetimbangan x^* dari Sistem (2.2) tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya, maka untuk menentukan apakah semua akar-akar karakteristiknya memiliki bagian *real* negatif dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 (Allen, 2007) Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Diberikan persamaan karakteristik polinomial

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik polinomial $P(\lambda)$ adalah negatif atau memiliki bagian real negatif jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif.

Kondisi Routh-Hurwitz untuk $n = 2$, 3, 4 dan 5 sebagai berikut :

$n = 2 : a_1 > 0,$ dan $a_2 > 0$.

$n = 3 : a_1 > 0,\ a_3 > 0,$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

$n = 4 : a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$.

$n = 5 : a_i > 0,\ a_i = 1, 2, 3, 4, 5,\ a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4,$ dan

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2.$$

Apabila kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, titik kesetimbangan x^* stabil asimtotik.

Contoh 2.3 : Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - xy. \\ \frac{dy}{dt} &= -y + xy. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tentukan titik kesetimbangan dan kestabilannya!

Penyelesaian :

Titik kesetimbangan pada sistem Persamaaan (2.7) dapat diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga menjadi :

$$x - xy = x(1 - y) = 0. \tag{2.8}$$

Jika $x = 0$ maka $(1 - y) = 0,$

$$\Rightarrow y = 1.$$

$$-y + xy = y(-1 + x) = 0. \tag{2.9}$$

Jika $y = 0$ maka $(-1 + x) = 0,$

$$\Rightarrow x = 1.$$

Berdasarkan Persamaan (2.8) dan (2.9) diperoleh titik kesetimbangannya yaitu (0,0) dan (1,1). Kemudian akan dicari kestabilan pada titik kesetimbangan. Kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan mencari hasil pelinearan menggunakan matriks Jacobian. Untuk mendapatkan matriks Jacobian dilakukan penyelesaian sebagai berikut

Misalkan :

$$f_1 = x - xy = x(1-y).$$

$$f_2 = -y + xy = y(-1+x).$$

Kemudian fungsi f_1 dan f_2 diturunkan secara parsial terhadap x dan y sebagai berikut :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 - y. \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1 + x$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobiannya yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1-y & -x \\ y & -1+x \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan (0,0) dan (1,1) sebagai berikut :

1. Titik kesetimbangan (0,0).

Substitusikan titik kesetimbangan (0,0) ke matriks Jacobian (2.10) sehingga diperoleh matriks Jacobiannya sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian berdasarkan Persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-0=0,$$

$$\lambda^2-1=0. \qquad (2.11)$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) sehingga diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$. Karena terdapat nilai eigen yang memiliki bagian real positif maka titik kesetimbangan di (0,0) tidak stabil.

2. Titik kesetimbangan (1,1).

Substitusikan titik kesetimbangan (1,1) ke matriks Jacobian (2.10) sehingga diperoleh matriks Jacobiannya sebagai berikut :

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian berdasarkan Persamaan (2.6) sebagai berikut :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0,$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)=0,$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}=0,$$

$$(-\lambda)(-\lambda)-(-1)=0,$$

$$\lambda^2+1=0. \qquad (2.12)$$

Berdasarkan Persamaan (2.12) sehingga diperoleh $\lambda_{1,2} = \pm i$. Karena nilai eigen adalah i dan memiliki bagian real 0 maka titik kesetimbangan di (1,1) stabil (Edwards, 2008).

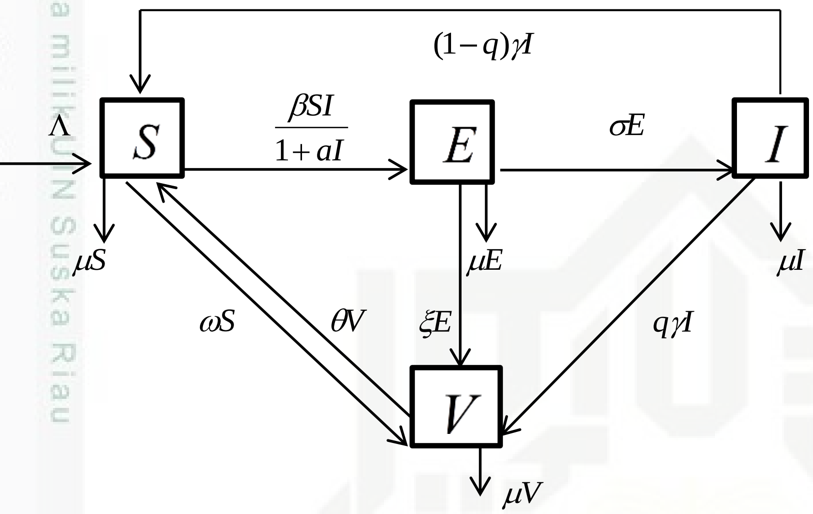
2.4 Model Epidemik SVEIS Sahu dan Dhar (2012)

Pada jurnal Sahu dan Dhar (2012) model epidemik SVEIS, populasinya dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok *S* (*susceptible*), *V* (*vaccinated*), *E* (*exposed*), dan *I* (*infected*). Kelompok *S* (*susceptible*) yaitu individu-individu yang sehat tetapi rentan terhadap infeksi penyakit. Kelompok *V* (*vaccinated*) yaitu individu-individu telah divaksinasi dan tidak memiliki kekebalan permanen atau mengalami pemudaran vaksin sehingga dapat menjadi rentan kembali. Kelompok *E* (*exposed*) yaitu kelompok individu yang mengalami masa inkubasi dan tidak memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit. Kelompok *I* (*infected*) yaitu individu-individu yang telah terinfeksi dan mampu menularkan penyakit serta dapat sembuh dari penyakit sehingga individu tersebut dapat menjadi rentan kembali atau masuk ke kelompok *S* (*susceptible*).

Untuk model epidemik SVEIS diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut :

1. Populasi tertutup (pertambahan atau pengurangan populasi terjadi hanya karena kelahiran atau kematian).
2. Setiap individu yang baru lahir Λ masuk kelompok *S* (*susceptible*).
3. Individu yang telah divaksinasi tidak memiliki kekebalan permanen atau mengalami pemudaran vaksin sehingga dapat menjadi rentan kembali.
4. Laju infeksi pada proses penularan individu dari kelompok *susceptible* menjadi *exposed* sebesar $\frac{\beta SI}{1+aI}$.
5. Laju sebagian individu rentan yang divaksinasi sebesar ω.
6. Sebagian individu pada masa inkubasi akan memperoleh kekebalan sementara (karena kekebalan alami sebesar ξ) sehingga bergabung ke kelas vaksinasi, dan sebagian yang tidak memperoleh kekebalan akan menjadi individu terinfeksi.
7. Laju sebagian individu terinfeksi yang sembuh dari penyakit sebesar γ.
8. Laju sebagain individu yang sembuh akan memperoleh kekebalan sebesar q.
9. Kematian alami terjadi pada setiap kelompok dengan laju μ.

Berdasarkan asumsi tersebut dapat dibuat diagram alir untuk model epidemik SVEIS sebagai berikut :



Gambar 2.1 Model SVEIS Sahu dan Dhar (2012)

Berdasarkan diagram alir di atas maka dapat dibentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \omega S + \theta V - \frac{\beta SI}{1+aI} + (1-q)\gamma I, \tag{2.14}$$

$$\frac{dV}{dt} = \omega S - \theta V - \mu V - \xi E + q\gamma I, \tag{2.15}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+aI} - \mu E - \xi E - \sigma E, \tag{2.16}$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I. \tag{2.17}$$