BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang deret Taylor, orde konvergensi, indeks efisiensi, metode Newton-Steffensen dan orde konvergensinya, metode Halley dan orde konvergensinya, metode Potra Ptak dan orde konvergensinya.

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial.

Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial, yang mana koefisien polinomial tersebut bergantung pada turunan fungsi pada titik yang bersangkutan.

Teorema 2.1: (Purcell, 2004) Diberikan f fungsi kontinu yang mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka D yang memuat a. Jadi untuk setiap x di dalam D,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \qquad (2.1)$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (2.2)$$

adalah suku sisa dalam rumus Taylor dan ξ adalah titik diantara x dan a. Sehingga Persamaan (2.2) merupakan galat dari persamaan Taylor.

Bukti: Misalkan sebuah polinomial berderajat n dengan fungsi f pada selang terbuka D, maka untuk setiap $x \in D$ berlaku

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n,$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \ , \qquad (2.3)$$

Kemudian Persamaan (2.3) dapat diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ hingga $f^{(n)}(x)$ yang menghasilkan bentuk seperti berikut:

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+4b_4(x-a)^3+\cdots+b_n n(x-a)^{n-1} \qquad (2.4)$$

$$f''(x)=2b_2+2\cdot 3b_3(x-a)+2\cdot 3\cdot 4b_3(x-a)^2+\cdots+b_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \qquad (2.5)$$

$$f'''(x)=2\cdot 3b_3+2\cdot 3\cdot 4b_4(x-a)+\cdots+b_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} \qquad (2.6)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=b_n n! \qquad (2.7)$$

Substitusikan $x=a$ ke Persamaan (2.4) hingga Persamaan (2.7), sehingga diperoleh

$$f(a)=b_0$$

$$f'(a)=b_1$$

$$f''(a)=2b_2$$

$$f'''(a)=2\cdot 3b_3$$

$$f^{(4)}(a)=2\cdot 3\cdot 4b_4$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a)=b_n n \qquad (2.8)$$

Persamaan (2.8) dapat ditulis

$$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (2.9)$$

Selanjutnya subsitusikan Persamaan (2.9) ke Persamaan (2.3), sehingga diperoleh

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ . \ \blacksquare \qquad (2.10)$$

Uraian dari Persamaan (2.10) akan membentuk persamaan deret Taylor pada Persamaan (2.1).

2.2 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu orde yang menunjukkan kecepatan dari suatu metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi $f(x)$. Berikut akan dijelaskan tentang orde konvergensi.

Definisi 2.1: Orde Konvergensi (Sharma dkk, 2011) Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi riil dengan akar sederhana α dan misalkan $\{x_n\}_{n\in N}$ adalah sebuah barisan bilangan riil yang konvergen ke α. Orde konvergensi dinyatakan dengan p, jika terdapat sebuah $p \in \Re^+$, sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|(x_n - \alpha)|^p} = c\,. \tag{2.11}$$

dengan $c \neq 0$.

Jika $p = 2$ atau 3, maka orde kekonvergenan dengan barisan bilangan riil berturut-turut dikenal dengan istilah kuadratik dan kubik.

Definisi 2.2: Orde Konvergensi (Sharma dkk, 2011) Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan galat pada iterasi ke-n, maka galat iterasi ke-($n+1$) didefenisikan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1})\,. \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) adalah persamaan galat untuk setiap metode iterasi. Jika persamaan galat ini dapat ditentukan untuk sebarang metode iterasi, maka nilai p disebut sebagai orde kekonvergenan.

Orde konvergensi dari suatu metode iterasi digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier $f(x) = 0$. Secara umum, bila orde konvergensi suatu metode iterasi rendah, maka iterasi yang dilakukan terhadap metode tersebut akan lebih banyak dari pada metode iterasi dengan orde konvergensi yang tinggi. Hal ini menyebabkan metode dengan orde konvergensi yang rendah akan terlihat kurang bagus dibandingkan metode dengan orde konvergensi yang lebih tinggi dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Contoh 2.1: Buktikan bahwa metode Newton memiliki konvergensi kuadratik, dengan persamaan $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Penyelesaian :

Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan $f(\alpha) = 0$, dengan $k = 2$, 3, …, dan $e_n = x_n - \alpha$. Selanjutnya aproksimasikan fungsi $f(x)$ di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O(e_n^4),$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\, f'(\alpha)} e_n^3 + O(e_n^4) \right), \tag{2.13}$$

misalkan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$, dengan $k = 2, 3, \ldots$, maka Persamaan (2.13) dapat ditulis

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.14}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor disekitar $x = \alpha$, maka

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + O(e_n^3),$$

$$= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n + \frac{f'''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right),$$

$$= f'(\alpha)\left(1 + 2\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n + 3\frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right),$$

$$= f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right). \tag{2.15}$$

Berdasarkan Persamaan (2.15), diperoleh

$$\frac{1}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3))}, \tag{2.16}$$

dengan

$$u = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3).$$

Persamaan (2.16) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret geometri $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(\alpha)}(1-(2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)) + (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^2 - \cdots),$$

$$= \frac{1}{f'(\alpha)}(1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.17}$$

Jika Persamaan (2.14) dibagi dengan Persamaan (2.17), maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.18}$$

Substitusikan Persamaan (2.18) ke persamaan Newton di atas, sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.19}$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)),$$

atau

$$e_{n+1} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \blacksquare \tag{2.20}$$

Jelas terlihat pada Persamaan (2.20) bahwa $p = 2$, maka terbukti metode Newton memiliki konvergensi kuadratik. Selain menggunakan ekspansi deret Taylor, Orde konvergensi juga dapat dilakukan menggunakan *computational order of convergence* (*COC*).

Definisi 2.3: *Computational Order of Convergence* (*COC*) (Sharma dkk, 2011)

Misalkan α adalah akar dari fungsi f, dan jika x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang dekat ke α. Jadi orde konvergensi secara komputasi *COC* dapat ditulis dengan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.21}$$

Contoh 2.2: Diketahui fungsi nonlinier $f(x) = x^4 + 4x^3 - 15$ dengan $\alpha \approx 1{,}405264582398863$ dan $x_0 = 1{,}00000000$. Tunjukkan bahwa metode Newton berkonvergensi kuadratik dengan menggunakan *computational order of convergence* (*COC*) dengan ketelitian $\varepsilon = 10^{-10}$ dan digit 100.

Penyelesaian:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 15,$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2.$$

Substitusikan $x_0 = 1{,}00000000$ ke Persamaan (1.2), sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_1 = 1{,}00000000 - \frac{(-10{,}0000000)}{16{,}00000000},$$

$$x_1 \approx 1{,}62500000.$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh $x_2 \approx 1{,}43796478$, $x_3 \approx 1{,}40611942$, $x_4 \approx 1{,}40526518$ dan $x_5 \approx 1{,}40526458$.

Selanjutnya dengan menggunakan lima iterasi awal yaitu x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5, akan ditentukan orde konvergensi yang diteliti menggunakan nilai iterasi dengan rumus yang diberikan pada Persamaan (2.21), dan diperoleh

$$\rho_1 \approx \frac{\ln\left|(x_2 - \alpha)/(x_1 - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_1 - \alpha)/(x_0 - \alpha)\right|},$$

$$\rho_1 \approx \frac{\ln\left|(1{,}43796478 - 1{,}40526458)/(1{,}62500000 - 1{,}40526458)\right|}{\ln\left|(1{,}62500000 - 1{,}40526458)/(1{,}00000000 - 1{,}40526458)\right|},$$

$$\rho_1 \approx 3{,}112226.$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh $\rho_2 \approx 1{,}912937$, $\rho_3 \approx 1{,}991555$ dan $\rho_4 \approx 1{,}999885$.

Selanjutnya untuk hasil *COC* dapat dilihat pada Tabel 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Hasil *COC* Metode Newton dengan Akar Persamaan

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	COC
1	1,62500000	6,25000000e-01	2,19735418e-01	-
2	1,43796478	1,87035223e-01	3,27001945e-02	3,112226
3	1,40611942	3,18453585e-02	8,54836055e-04	1,912937
4	1.40526518	8,54233615e-04	6,02440244e-07	1,991555
5	1,40526458	6,02439945e-07	2,99460619e-13	1,999885

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa nilai *computational order of convergence* (*COC*) konvergen ke-2. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode Newton adalah dua atau kuadratik.

2.3 Indeks Efesiensi

Definisi 2.4: Efficiency Index (Rostami dan Esmaeli, 2014): Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh

$$IE = p^{1/r},$$

dimana p adalah orde konvergensi dari dari suatu metode.

Nilai indeks efisiensi menunjukkan seberapa efektifnya sebuah metode dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Semakin besar nilai indeks efisiensi, maka semakin efektif metode tersebut.

Sebagai contoh, indeks efisiensi untuk metode Newton adalah $2^{1/2} \approx 1{,}414$, karena metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik dan memiliki dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$.

2.4 Metode Newton-Steffensen dan Orde Konvergensinya

Diberikan sebuah persamaan metode Newton-Steffensen (Sharma, 2005) sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}, \tag{2.22}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.23}$$

Metode Newton-Steffensen memiliki evaluasi fungsi sebanyak tiga, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$. Selanjutnya akan dibahas orde konvergensi metode Newton-Steffensen.

Teorema 2.2: Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensial $f : D \to R$ pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (2.22) diperoleh galat:

$$e_{n+1} = c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.24}$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan $f(\alpha) = 0$, $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$, dengan $k = 2, 3, \ldots$, dan $e_n = x_n - \alpha$. Selanjutnya gunakan Persamaan (2.18), sehingga diperoleh bentuk Persamaan (2.23) sebagai berikut

$$y_n = x_n - (e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.25}$$

Oleh karena $x_n = \alpha + e_n$, maka Persamaan (2.25) dapat ditulis

$$y_n = \alpha + e_n - (e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.26}$$

Kemudian ekspansi $f(y_n)$ menggunakan deret Taylor di sekitar α, diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + + O(e_n^4)). \tag{2.27}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (2.14) dan Persamaan (2.27), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{(f(x_n)-f(y_n))} = 1 + c_2 e_n + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^2 + (3c_4 - 6c_2c_3 + 3c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.28}$$

Kemudian jika Persamaan (2.18) dikali dengan Persamaan (2.28), maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))} = e_n - c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.29}$$

Substitusikan Persamaan (2.29) ke Persamaan (2.22), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4))\,.$$

Oleh karena $x_n = \alpha + e_n$ dan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$, sehingga

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n + c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4))\,,$$

atau

$$e_{n+1} = c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4). \ \blacksquare \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) merupakan bentuk persamaan galat untuk metode Newton-Steffensen dan persamaan ini juga menunjukkan bahwa metode Newton-Steffensen memiliki orde konvergensi tiga.

2.5 Metode Halley dan Orde Konvergensinya

Pandang sebuah persamaan metode Halley (Jisheng dkk, 2006) sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}\,. \tag{2.31}$$

Metode Halley memiliki evaluasi fungsi sebanyak tiga, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$. Selanjutnya akan dibahas orde konvergensi metode Halley.

Teorema 2.3: Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensial $f : D \to R$ pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (2.31) diperoleh galat:

$$e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.32}$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan $f(\alpha)=0$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$ dengan $k = 2, 3, \ldots,$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Selanjutnya, jika $f''(x_n)$ dilakukan ekspansi deret Taylor di sekitar $x=\alpha$, maka diperoleh

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^2)). \quad (2.33)$$

Selanjutnya penyelesaian dasar didapat

$$2f(x_n)f'(x_n) = 2e_n + 6c_2e_n^2 + (8c_3 + 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4), \quad (2.34)$$

$$2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n) = 2 + 2c_2e_n - 2c_2^2e_n^2 + (-4c_4 - 8c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (2.35)$$

Kemudian jika Persamaan (2.34) dibagi dengan Persamaan (2.35), maka diperoleh

$$\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (2.36)$$

Substitusikan Persamaan (2.36) ke Persamaan (2.31), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \quad (2.37)$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, Persamaan (2.37) dapat ditulis

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n + (c_3 - c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)),$$

atau

$$e_{n+1} = (c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \blacksquare \quad (2.38)$$

Persamaan (2.38) merupakan bentuk persamaan galat untuk metode Halley yang menunjukkan bahwa metode Halley memiliki orde konvergensi tiga.

2.6 Metode Potra-Ptak dan Orde Konvergensinya

Pandang sebuah persamaan metode Potra-Ptak (Ezzati dan Saleki, 2011) sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.39)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Metode Potra-Ptak memiliki evaluasi fungsi sebanyak tiga, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$. Selanjutnya akan dibahas orde konvergensi metode Potra-Ptak.

Teorema 2.4: Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensial $f: D \to R$ pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka galat Persamaan (2.36) diperoleh:

$$e_{n+1} = 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.40}$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan $f(\alpha) = 0$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\, f'(\alpha)}$ dengan $k = 2, 3, \ldots$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Selanjutnya, jika Persamaan (2.27) dikali dengan Persamaan (2.17), maka diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = c_2 e_n^2 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + +O(e_n^4)\,. \tag{2.41}$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.18) dan Persamaan (2.41) ke Persamaan (2.39), sehingga diperoleh orde konvergensi metode Potra-Ptak sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4))\,. \tag{2.42}$$

Oleh karena $x_n = \alpha + e_n$ dan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4))\,,$$

atau

$$e_{n+1} = 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4). \blacksquare \tag{2.43}$$

Persamaan (2.43) merupakan persamaan galat untuk metode Potra-Ptak yang menunjukkan bahwa metode Potra-Ptak memiliki orde konvergensi tiga.