BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar utama dalam penurunan suatu metode numerik, diantaranya metode Newton Rhapson. Deret Taylor merupakan kontribusi matematikawan inggris Brook Taylor, dengan definisi mengenai deret Taylor sebagai berikut

Teorema 2.1 : (Purcell, 2004) Diberikan f fungsi yang di mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang memuat a. Jadi untuk setiap $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{2.1}$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, x < \xi < a. \tag{2.2}$$

2.2 Orde Konvergensi

Orde korvengensi menunjukkan tingkat kecepatan sebuah metode iterasi dalam memperoleh nilai hampiran akar-akar persamaan nonlinear. Semakin tinggi orde konvergensi sebuah metode iterasi, maka semakin cepat proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear. Definisi yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 : Orde Konvergensi (Sharma, 2011) Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan misalkan $\{x_n\}_{n\in N}$ adalah sebuah barisan bilangan riil untuk $n \geq 0$, konvergen menuju α. Kemudian, dinyatakan bahwa orde konvergensi dari deret adalah p, jika terdapat konstanta $c \neq 0$ dan $p \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.3}$$

Jika nilai dari $p = 2$ atau $p = 3$, maka metode iterasinya memiliki orde konvergensi dua, atau tiga.

Contoh 2.1 : Tunjukkan bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua, dengan persamaan iterasinya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ dan } f'(x_n) \neq 0. \tag{2.4}$$

Penyelesaian :

Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar α diperoleh

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \cdots. \tag{2.5}$$

Jika $x = x_n$, maka Persamaan (2.5) menjadi

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3 + \cdots. \tag{2.6}$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(\alpha) = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha) e_n^{\,2} + \frac{1}{3!} f'''(\alpha) e_n^{\,3} + \mathrm{O}(e_n^{\,4}), \\
&= f'(\alpha) e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha) e_n^{\,2} + \frac{1}{3!} f'''(\alpha) e_n^{\,3} + O(e_n^{\,4}), \\
&= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} e_n^{\,2} + \frac{f'''(\alpha)}{3!\, f'(\alpha)} e_n^{\,3} + \frac{O(e_n^{\,4})}{f'(\alpha)} \right),
\end{aligned}$$

misalkan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)\, j!}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + \mathrm{O}(e_n{}^4)). \tag{2.7}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan kembali deret Taylor untuk mengekspansi $f'(x_n)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(x_n) &= f'(\alpha + e_n), \\
&= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f^{(3)}(\alpha) e_n{}^2 + O(e_n{}^3), \\
&= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n{}^2}{f'(\alpha)} + O(e_n{}^3)\right), \\
&= f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3)).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Apabila Persamaan (2.7) dibagi dengan Persamaan (2.8), akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + \mathrm{O}(e_n{}^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3))}, \\
&= \frac{e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + \mathrm{O}(e_n{}^4)}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3)},
\end{aligned}$$

Misalkan $u = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3)$, dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots,$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \\
&\quad \times (1 - (2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3)) + (2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3))^2 - \cdots), \\
&= (e_n + c_2 e_n{}^2 + c_3 e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \times (1 - 2c_2 e_n + (4c_2{}^2 + 3c_3)e_n{}^2 + O(e_n{}^3)) \\
&= e_n - c_2 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.9) disubsitusikan ke Persamaan (2.4) menghasilkan

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3)).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh

$$e_{n+1} = c_2 e_n{}^2 + \mathrm{O}(e_n{}^3). \tag{2.10}$$

Berdasarkan Persamaan (2.10), maka terbukti bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua. ■

Orde konvergensi juga dapat dilakukan dengan menggunakan *COC*. Berikut ini merupakan definisi dari COC.

Definisi 2.2 : ***Computational Order of Convergence*** **(Weerakoon dan Fernando, 2000)** Misalkan α adalah akar dari suatu persamaan nonlinear $f(x)$, dan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat dengan α, maka *Computational Order of Convergence* (*COC*) dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}. \qquad (2.11)$$

Contoh 2.2 : Diberikan fungsi $f(x) = 2x^3 - 2x$ dengan menggunakan metode Newton, tentukan iterasi untuk menentukan akar persamaan $\alpha = 1{,}00000000$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1{,}50000000$ dan ketelitian $e = 10^{-8}$.

Penyelesaian:

$$f(x_n) = 2x^3 - 2x,$$

$$f'(x_n) = 6x^2 - 2.$$

$x_0 = 1{,}50000000$ distubtitusikan ke Persamaan (1.1) menghasilkan

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 1{,}50000000 - \frac{3{,}75000000}{11{,}50000000} \\ &= 1{,}17391304. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh nilai $x_2 = 1{,}03230712$, $x_3 = 1{,}00145595$, $x_4 = 1{,}00000316$, $x_5 = 1{,}00000000$, dan $x_6 = 1{,}00000000$.

Jika hasil perhitungan untuk nilai iterasi digunakan untuk menghitung nilai *COC* diperoleh

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &\approx \frac{\ln\left|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)\right|},\\
&\approx \frac{\ln\left|(1{,}03230712-1{,}00000000)/(1{,}17391304-1{,}00000000)\right|}{\ln\left|(1{,}17391304-1{,}00000000)/(1{,}50000000-1{,}00000000)\right|},\\
&\approx \frac{\ln\left|(0{,}03230712)/(0{,}17391304)\right|}{\ln\left|(0{,}17391304)/(0{,}50000000)\right|},\\
&\approx 1{,}59392386.
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh nilai $\rho_2 \approx 1{,}84143434$, $\rho_3 \approx 1{,}97766407$, $\rho_4 \approx 1{,}99944796$.

Hasil perhitungan iterasi dan *COC* metode Newton dengan akar persamaan dapat dibentuk ke dalam tabel berikut

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dan *COC* Metode Newton

n	x_n	*COC*
0	1,50000000	-
1	1,17391304	-
2	1,03230712	1,59392386
3	1,00145595	1,84143434
4	1,00000316	1,97766408
5	1,00000000	1,99944797

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat disimpulkan bahwa metode Newton memiliki konvergensi kuadratik dengan $\rho \approx 2$.

Definisi 2.3: *Efficiency Index* (*I*) (Sharma, 2015) E*fficiency index* menunjukkan tingkat efisiensi sebuah metode iterasi dalam menghampiri akar persamaan nonlinear. Jika semakin besar nilai indeksnya, maka metode tersebut semakin efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Efisiensi metode yang diukur dengan konsep *efficiency index* didefinisikan sebagai $I = p^{\frac{1}{d}}$ dengan p merupakan orde konvergensi suatu metode dan d merupakan jumlah evaluasi fungsi. Sebagai contoh, metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan memiliki dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, maka metode Newton memiliki indeks efisiensi sebesar $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414.$

2.3 Ekspansi Deret Taylor Orde Dua

Pada tahun 2013, Behl dan Kanwar telah melakukan penelitian tentang modifikasi sebuah metode iterasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua. Behl memodifikasi metode iterasi Schroder menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua dengan menggunakan persamaan

$$f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n) = 0. \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat ditulis kembali kedalam bentuk

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{h^2}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) merupakan bentuk dari ekspansi deret Taylor orde dua yang digunakan oleh Behl dan Kanwar (2013) dalam memodifikasi metode iterasi Schroder.

Berikut ini adalah modifikasi metode iterasi Schroder menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua yang dilakukan oleh Behl. Metode iterasi Schroder didefenisikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \tag{2.14}$$

misalkan $x_{n+1} = x_n + h,$ maka berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh nilai

$$h = -\frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Nilai h yang diperoleh dari Persamaan (2.14) distubtitusikan ke ruas kanan Persamaan (2.13) menghasilkan

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} - \left(\frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.15}$$

Oleh karena $x_{n+1} = x_n + h,$ maka dengan menggunakan nilai h Persamaan (2.15) diperoleh sebuah metode iterasi baru dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} - \frac{f(x_n)^2 f'(x_n) f''(x_n)}{(f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n))^2}. \tag{2.16}$$

2.4 Metode Varian Newton dan Konvergensinya

Weerakoon dan Fernando (2000) telah memodifikasi metode Newton dengan menggunakan aturan trapesium. Aturan trapesium didefenisikan oleh

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)). \tag{2.17}$$

dengan menggunakan definisi integral

$$\int_{x_n}^{x} f'(\lambda)\,d\lambda = f(x) - f(x_n). \tag{2.18}$$

Persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(\lambda)\ d\lambda. \tag{2.19}$$

Bentuk integral pada Persamaan (2.18) diaproksimasi menggunakan aturan trapesium pada Persamaan (2.17) diperoleh

$$\int_{x_n}^{x} f'(\lambda)\ d\lambda \approx \frac{1}{2}(x - x_n)(f'(x_n) + f'(x)). \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) distubtitusikan ke Persamaan (2.19), sehingga Persamaan (2.19) dapat ditulis kembali menjadi

$$M_n(x) = f(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)(f'(x_n) + f'(x)). \tag{2.21}$$

Misalkan x_{n+1} merupakan akar-akar Persamaan (2.21) maka $M_n(x_{n+1}) = 0$. Sehingga Persamaan (2.21) dapat ditulis menjadi

$$f(x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)(f'(x_n) + f'(x_{n+1})) = 0$$

$$(x_{n+1} - x_n)(f'(x_n) + f'(x_{n+1})) = -2f(x_n)$$

$$(x_{n+1}-x_n)=\frac{-2f(x_n)}{(f'(x_n)+f'(x_{n+1}))}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{(f'(x_n)+f'(x_{n+1}))}. \qquad (2.22)$$

Berdasarkan Persamaan (2.22), diperoleh metode iterasi varian Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{(f'(x_n)+f'(y_n))},\ n=0,1,2,\cdots \qquad (2.23)$$

dengan

$$y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.24)$$

Teorema 2.2 : (Werakoon-Fernando, 2000) Misalkan $f:D\rightarrow\Re$ berada diselang terbuka D. Asumsikan f', f'', f''' berada diselang D. Jika $f(x)$ mempunyai akar sederhana di $\alpha\in D$ dan x_0 sangat dekat ke α, maka persamaan (2.23) memenuhi persamaan galat

$$e_{n+1}=\left(c_2^2+\frac{1}{2}c_3\right)e_n^3+O(e_n^4), \qquad (2.25)$$

dengan $e_n=x_n-\alpha$ dan $c_j=\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)\,j!},\ j=2,3,...$

Bukti. Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(\alpha)\neq 0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengekspansi fungsi f di sekitar α diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha+e_n)\\
&= f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^{\,2}+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\alpha)e_n^{\,3}+O(e_n^{\,4})\\
&= f'(\alpha)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^{\,2}}{f'(\alpha)}+\frac{1}{3!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^{\,3}}{f'(\alpha)}+O(e_n^{\,4})\right)\\
&= f'(\alpha)(e_n+c_2e_n^{\,2}+c_3e_n^{\,3}+O(e_n^{\,4})). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang sama, ekspansi deret Taylor untuk $f'(x_n)$ adalah

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha + e_n) \\ &= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f^{(3)}(\alpha)e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3}) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^{\ 2}}{f'(\alpha)} + O(e_n^{\ 3})\right) \\ &= f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3})). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Persamaan (2.26) dibagi dengan Persamaan (2.27) menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)\,(e_n + c_2e_n^{\ 2} + c_3e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3}))}, \\ &= \frac{(e_n + c_2e_n^{\ 2} + c_3e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}))}{(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3}))}, \end{aligned}$$

Misalkan $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + \mathrm{O}(e_n^{\ 3})$, dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots,$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (e_n + c_2e_n^{\ 2} + c_3e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4})) \\ &\quad \times (1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3})) + (2c_2e_n + 3c_3e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3}))^2 - \cdots) \\ &= (e_n + c_2e_n^{\ 2} + c_3e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4})) \times (1 - 2c_2e_n + (4c_2^{\ 2} + 3c_3)e_n^{\ 2} + O(e_n^{\ 3})) \\ &= e_n - c_2e_n^{\ 2} + (2c_2^{\ 2} - 2c_3)e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) distubtitusikan ke Persamaan (2.24) menghasilkan

$$y_n = \alpha + c_2e_n^{\ 2} + (2c_3 - 2c_2^{\ 2})e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}). \tag{2.29}$$

Selanjutnya, lakukan ekspansi $f'(y_n)$ dengan deret Taylor menghasilkan

$$\begin{aligned} f'(y_n) &= f'(\alpha) + c_2e_n^{\ 2} + (2c_3 - 2c_2^{\ 2})e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4})\, f''(\alpha) + O(e_n^{\ 4}) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + (2c_2e_n^{\ 2} + 4(c_3 - c_2^{\ 2})e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4}))\left(\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right)\right) \\ &= f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n^{\ 2} + 4c_2(c_3 - c_2^{\ 2})e_n^{\ 3} + O(e_n^{\ 4})). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) dijumlahkan dengan Persamaan (2.27) menghasilkan

$$
\begin{aligned}
f'(x_n)+f'(y_n) &= f'(\alpha)(1+2c_2e_n+3c_3e_n^{2}+O(e_n^{3})) \\
&\quad + f'(\alpha)(1+2c_2e_n^{2}+4c_2(c_3-c_2^{2})e_n^{3}+O(e_n^{4})) \qquad (2.31)\\
&= 2f'(\alpha)(1+c_2e_n+(c_2^{2}+\frac{3}{2}c_3)e_n^{2}+O(e_n^{3})).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk mendapatkan orde konvergensi dari Persamaan (2.23) lakukan pembagian Persamaan (2.26) dengan Persamaan (2.31) menggunakan deret geometri menghasilkan

$$
\begin{aligned}
\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} &= (e_n+c_2e_n^{2}+c_3e_n^{3}+O(e_n^{4})) \\
&\quad \times\left(1+c_2e_n+(c_2^{2}+\frac{3}{2}c_3)e_n^{2}+O(e_n^{3})\right)^{-1} \\
&= (e_n+c_2e_n^{2}+c_3e_n^{3}+O(e_n^{4}))(1-c_2e_n+\frac{3}{2}c_3e_n^{2}+O(e_n^{3})) \\
&= e_n-c_2e_n^{2}-\frac{3}{2}c_3e_n^{3}+c_2e_n^{2}-c_2^{2}e_n^{3}+c_3e_n^{3}+O(e_n^{4}) \\
&= e_n-(c_2^{2}+\frac{1}{2}c_3)e_n^{3}+O(e_n^{4}). \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Persamaan (2.32) di stubtitusikan ke Persamaan (2.23) menghasilkan

$$x_{n+1}=e_n+\alpha-(e_n-(c_2^{2}+\frac{1}{2}c_3)e_n^{3}+O(e_n^{4})).$$

Oleh karena $x_{n+1}=e_{n+1}+\alpha$ dan $x_n=e_n+\alpha$ diperoleh

$$e_{n+1}=(c_2^{2}+\frac{1}{2}c_3)e_n^{3}+O(e_n^{4}). \qquad (2.33)$$

Berdasarkan Persamaan (2.33) dapat dilihat bahwa Persamaan (2.23) memiliki orde konvergensi tiga. ■

2.5 Rata-Rata Centroidal

Rata rata centoidal merupakan salah satu diantara rata-rata yang ada. Rata-rata centroidal dapat dikontruksi dari rata rata aritmatik (AM) dan rata-rata geometri (GM). Rata rata Centroidal didefenisikan

$$CM=\frac{4(AM)^{2}-(GM)^{2}}{3(AM)}, \qquad (2.34)$$

dengan dua skalar positif *a* dan *b*, rata-rata aritmatik dan geometri dapat didefenisikan sebagai $AM = \frac{a+b}{2}$ dan $GM = \sqrt{ab}$.

Berdasarkan rata-rata aritmatik dan geometri, maka rata-rata centroidal dua skalar positif *a* dan *b* adalah

$$CM = \frac{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

$$CM = \frac{2\left((a+b)^2 - ab\right)}{3(a+b)},$$

$$CM = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.$$

Rumus rata-rata centoidal dua skalar positif *a* dan *b* adalah

$$CM = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}. \qquad (2.35)$$

2.6 Selisih Terbagi (*Divided Difference*)

Misalkan diberikan dua buah titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), dengan melakukan interpolasi titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) dengan sebuah garis lurus diperoleh

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \qquad (2.36)$$

Bentuk Persamaan (2.36) dapat ditulis kembali menjadi

$$p_1(x) = a_0 + a_1\ (x - x_0), \qquad (2.37)$$

dengan

$$a_0 = y_0, \qquad (2.38)$$

dan

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \qquad (2.39)$$

Persamaan (2.39) dapat ditulis kembali menjadi

$$a_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \qquad (2.40)$$

Selanjutnya, untuk polinomial kuadratik dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1), \qquad (2.41)$$

atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1). \qquad (2.42)$$

Persamaan (2.42) memperlihatkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari polinom sebelumnya, $p_1(x)$. Jika $x = x_2$, berdasarkan Persamaan (2.41) diperoleh nilai a_2 sebagai berikut

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \qquad (2.43)$$

Nilai a_0 dan nilai a_1 distubtitusikan ke Persamaan (2.43) menghasilkan

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}. \qquad (2.44)$$

Persamaan (2.44) dapat ditulis kembali menjadi

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}. \qquad (2.45)$$

Demikianlah seterusnya membentuk polinom Newton secara bertahap, polinom derajat *n* dibentuk dari polinom derajat (*n*-1). Bentuk Persamaan (2.40) dan Persamaan (2.45) merupakan bentuk selisih terbagi (*divided difference*). Bentuk selisih terbagi telah banyak digunakan untuk melakukan aproksimasi terhadap suatu fungsi, salah satunya adalah fungsi $f''(x_n)$. Bentuk aproksimasi $f''(x_n)$ selisih terbagi yang sering digunakan dalam penelitian adalah

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}. \qquad (2.46)$$

2.7 Selisih Maju (*Forward Difference*)

Berdasarkan bentuk selisih terbagi, maka penurunan rumus selisih maju adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} f[x_1, x_0] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\ &= \frac{\Delta f_0}{h}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} f[x_2, x_1, x_0] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\dfrac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h}}{2h} \\ &= \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

Berdasarkan Persamaan (2.47) dan Persamaan (2.48) diperoleh bentuk umum

$$f[x_n, \ldots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} \quad . \tag{2.49}$$

Jika titik-titik berjarak sama dinyatakan sebagai

$$x_i = x_0 + ih, \; i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Persamaan (2.47) dapat ditulis menjadi

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.50}$$

Bentuk *forward difference* dapat digunakan untuk mengaproksimasikan $f''(x_n)$, bentuk aproksimasi $f''(x_n)$ *forward difference* adalah

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n + h) - f'(x_n)}{h}. \tag{2.51}$$