BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Cuaca dan Iklim

Cuaca adalah keadaan udara pada saat tertentu dan di wilayah tertentu yang relatif sempit dan pada jangka waktu yang singkat. Cuaca itu terbentuk dari gabungan unsur cuaca dan jangka waktu cuaca bisa hanya beberapa jam saja. Misalnya: pagi hari, siang hari atau sore hari, dan keadaannya bisa berbeda-beda untuk setiap tempat serta setiap jamnya. Di Indonesia keadaan cuaca selalu diumumkan untuk jangka waktu sekitar 24 jam melalui prakiraan cuaca yang dikembangkan oleh Badan Meteorologi dan Geofisika (BMG), Departemen Perhubungan. Untuk negaranegara yang sudah maju perubahan cuaca sudah diumumkan setiap jam dan sangat akurat (tepat).

Iklim adalah keadaan cuaca rata-rata dalam waktu satu tahun yang penyelidikannya dilakukan dalam waktu yang lama (± minimal 30 tahun) dan meliputi wilayah yang luas. Iklim dapat terbentuk karena adanya:

2.1.1 Suhu Udara

Suhu atau temperatur udara adalah derajat panas dari aktivitas molekul dalam atmosfer. Alat untuk mengukur suhu atau temperatur udara atau derajat panas disebut Thermometer. Biasanya pengukuran suhu atau temperatur udara dinyatakan dalam skala Celcius (C), Reamur (R), dan Fahrenheit (F).

Udara timbul karena adanya radiasi panas matahari yang diterima bumi. Tingkat penerimaan panas oleh bumi dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain:

1. Sudut datang sinar matahari, yaitu sudut yang dibentuk oleh permukaan bumi dengan arah datangnya sinar matahari. Makin kecil sudut datang sinar matahari, semakin sedikit panas yang diterima oleh bumi dibandingkan sudut yang datangnya tegak lurus.

2. Lama waktu penyinaran matahari, makin lama matahari bersinar, semakin banyak panas yang diterima bumi.
3. Keadaan muka bumi (daratan dan lautan), daratan cepat menerima panas dan cepat pula melepaskannya, sedangkan sifat lautan kebalikan dari sifat daratan.
4. Banyak sedikitnya awan, ketebalan awan mempengaruhi panas yang diterima bumi. Makin banyak atau makin tebal awan, semakin sedikit panas yang diterima bumi.

2.1.2 Kelembaban Udara

Unsur kedua yang dapat berpengaruh terhadap cuaca dan iklim di suatu tempat adalah kelembaban udara. Kelembaban udara adalah banyaknya uap air yang terkandung dalam massa udara pada saat dan tempat tertentu. Alat untuk mengukur kelembaban udara disebut psychrometer atau hygrometer.

Kelembaban udara dapat dibedakan menjadi:

1. Kelembaban mutlak atau kelembaban absolut, yaitu kelembaban yang menunjukkan berapa gram berat uap air yang terkandung dalam satu meter kubik (1 m^3) udara.
2. Kelembaban nisbi atau kelembaban relatif, yaitu bilangan yang menunjukkan berapa persen perbandingan antara jumlah uap air yang terkandung dalam udara dan jumlah uap air maksimum yang dapat ditampung oleh udara tersebut.

$$Kelembaban\ Nisbi = \frac{Kelembaban\ Mutlak\ Udara}{Nilai\ \ Jenuh\ Udara} \times 100\%$$

2.1.3 Curah Hujan

Apakah yang dimaksud dengan curah hujan? Curah hujan adalah jumlah air hujan yang turun pada suatu daerah dalam waktu tertentu. Alat untuk mengukur banyaknya curah hujan disebut Rain Gauge. Curah hujan diukur dalam harian, bulanan, dan tahunan.

Curah hujan yang jatuh di wilayah Indonesia dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain:

1. Bentuk medan atau topografi
2. Arah lereng medan
3. Arah angin yang sejajar dengan garis pantai
4. Jarak perjalanan angin di atas medan datar.

Hujan adalah butiran-butiran air yang dicurahkan dari atmosfer turun ke permukaan bumi. Sedangkan garis yang menghubungkan tempat-tempat di peta yang mendapat curah hujan yang sama disebut isohyet.

2.2 Analisis Frekuensi

Frekuensi (*frequency*) adalah jumlah kejadian sebuah variat dari variabel. Analisis frekuensi bertujuan untuk menentukan besaran data atau debit ekstrim yang berkaitan dengan frekuensi kejadiannya melalui penerapan distribusi kemungkinan. Di dalam analisis frekuensi diperlukan seri data cuaca yang diperoleh dari pos penakaran, baik yang manual maupun yang otomatis. Analisis ini berdasarkan pada sifat statistik data kejadian yang telah lalu untuk memperoleh probabilitas besaran cuaca di masa yang akan datang. Dengan anggapan sifat statistik kejadian cuaca yang akan datang masih sama dengan sifat statistik kejadian cuaca masa lalu.

Menurut Suripin (2004), dalam analisis data digunakan beberapa nilai statistik yang meliputi :

1. Rata-rata : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (2.1)
2. Varian : $S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ (2.2)

2.3 Distribusi Peluang

Dalam statistik dikenal dua macam distribusi peluang yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu. Pada dasarnya distribusi peluang yang menggunakan variabel acak diskrit, jika dapat diasumsikan secara terbatas dan dapat dihitung dengan jumlah yang jelas, sedangkan untuk distribusi peluang yang menggunakan vairabel acak kontinu tidak dapat dihitung atau tak hingga.

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Himpunan pasangan terurut $x, f(x)$ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang, fungsi massa peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila untuk setiap kemungkinan hasil :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x)dx = 1$ (2.3)
3. $P(X = x) = f(x)$

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan ril R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (2.4)
3. $P(a) < X < P(b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

2.4 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_x atau μ. Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$ (walpole & Myers, 1989).

Definisi 2.3 (Dennis dkk, 2002) Diberikan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan X adalah ;

« $= E(X) = \sum_{x} xf(x)$, bila X diskrit (2.5)

$$« = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{, bila } X \text{ kontinu} \qquad (2.6)$$

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang panannya $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acak kontinu, definisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (walpole & Myers, 1989).

2.5 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(X) = (X - «)^2$ karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau σ_x^2 atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz & Misra, 1988).

Definisi 2.4 (Dudewicz & Misra, 1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah :

$$Var(X) = E\left[(X - «)^2\right] = \sum_{x} X - «^2 f(x) \text{, bila } X \text{ diskrit} \qquad (2.7)$$

$$Var(X) = E\left[(X - «)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X - «^2 f(x)dx \text{, bila } X \text{ kontinu} \qquad (2.8)$$

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra, 1988) Variansi dari peubah acak X adalah :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (2.9)$$

Bukti :

$$Var(X) = E\left[(X - «)^2\right]$$

$$= E\left[X^2 - 2«X + «^2\right]$$

$$= E(X^2) - E(2«X) + E(«^2)$$

Karena $\mu = E(X)$, maka diperoleh :

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(«)]^2 \\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Definisi 2.5 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai $F_x(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (2.10)$$

Definisi 2.6 (Walpole & Myers, 1989) Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluang dari X adalah :

$$f(x) = \frac{x^{\sim-1}e^{-x}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}, \qquad 0 \leq x < \infty \qquad (2.11)$$

dengan :

$$\Gamma(\sim) = \int_{0}^{\infty} x^{\sim-1}e^{-x}dx \qquad (2.12)$$

Kuantitas $\Gamma(\sim)$ dikenal dengan fungsi gamma integral secara langsung akan menghasilkan $\Gamma(1) = 1$. Secara terus-menerus integral akan menghasilkan bahwa $\Gamma(\sim) = (\sim -1)\Gamma(\sim -1)$ untuk $\alpha > 1$, seperti yang dibuktikan pada bentuk berikut :

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\sim) &= \int_{0}^{\infty} x^{\sim-1}e^{-x}dx \\
&= -x^{\sim-1}e^{-x}\Big]_0^\infty + \int_{0}^{\infty}(\sim -2)x^{\sim-2}e^{-x}dx \\
&= 0 + \int_{0}^{\infty}(\sim -2)x^{\sim-2}e^{-x}dx
\end{aligned}
$$

$$= (\sim -1)\int_0^\infty x^{\sim -2} e^{-x} dx$$

$$= (\sim -1)\Gamma(\sim -1) \qquad (2.13)$$

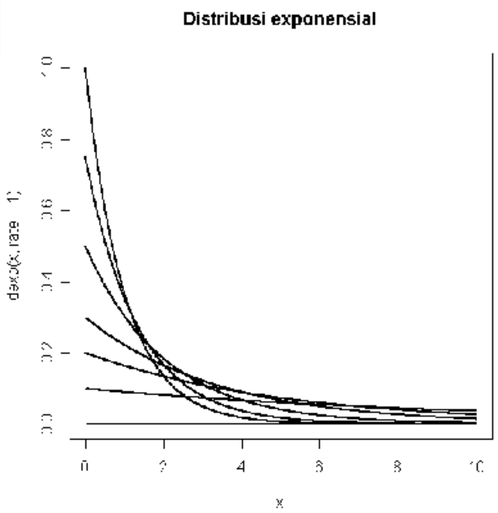
dan juga $\Gamma(n) = (n-1)!$ yang dihasilkan jika n bilangan bulat.

2.6 Distribusi Analisis Cuaca

Dalam analisis cuaca ini akan digunakan distribusi Eksponensial dan distribusi Gamma.

2.6.1 Dsitribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial memiliki peran yang sangat penting di bidang teori antrian dan teori keandalan (reliabilitas). Distribusi Eksponensial merupakan keadaan khusus dari distribusi Gamma.



Gambar 2.1 Distribusi Eksponensial

Peubah acak kontinu X terdistribusi Eksponensial dengan parameter β , jika fungsi padatnya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\ } e^{-\frac{x}{\ }} \qquad ; x > 0 \qquad (2.14)$$

$$f(x) = 0 \qquad ; x \text{ yang lain}$$

dengan $\quad > 0$.

Rata-rata dan variansi distribusi eksponensial adalah:

$$E(X) = \quad \text{dan } Var(x) = \quad ^2$$

2.6.2 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah salah satu distribusi kontinu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak persoalan dalam bidang rekayasa dan sains. Sebagai salah satu contohnya distribusi Gamma memainkan peran penting dalam teori antrian dan teori keandalan *(reliabilitas)* misalnya untuk mengatasi kehilangan data.

Distribusi Gamma memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{{}^{\text{ˉ}}\Gamma(\sim)} x^{\sim -1} e^{-\frac{x}{\ }} \qquad (2.15)$$

dengan nilai ekspektasi dan varians secara berurutan $\alpha\beta$ dan $\alpha\beta^2$.

Menurut (Walpole & Myers, 1989), setiap distribusi harus memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang. Adapun syarat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu memenuhi suatu fungsi kepadatan peluang adalah :

1. $f(x) \geq 0$, untuk setiap x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ $\qquad (2.16)$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{\sim -1} e^{-\frac{x}{\ }}}{{}^{\text{ˉ}}\Gamma(\sim)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\sim -1} e^{-\frac{x}{\ }}}{{}^{\text{ˉ}}\Gamma(\sim)} dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\sim -1} e^{-\frac{x}{\ }}}{{}^{\text{ˉ}}\Gamma(\sim)} dx$$

misalkan :

$$y = \frac{x}{\beta}$$

$$dy = \frac{1}{\beta} dx$$

$$x = y\beta$$

$$dx = \beta dy$$

maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{(y\ \ )^{\sim-1} e^{-y}}{{}^{-}\Gamma(\sim)}\ dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\sim-1}\ \ {}^{-\sim-1} e^{-y}}{{}^{-}\Gamma(\sim)} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\sim-1}\ \ {}^{-} e^{-y}}{{}^{-}\Gamma(\sim)} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\sim-1} e^{-y}}{\Gamma(\sim)} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sim)} \int_0^{\infty} y^{\sim-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sim)} \Gamma(\sim)$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Gamma dua parameter sebagai berikut :

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx \tag{2.17}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{x^{\sim-1} e^{-\frac{x}{-}}}{{}^{-}\Gamma(\sim)} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{\sim} e^{-\frac{x}{-}}}{{}^{-}\Gamma(\sim)} dx$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty x^{\sim} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty \frac{{}^{\sim+1}\Gamma(\sim+1)}{{}^{\sim+1}\Gamma(\sim+1)}\, x^{\sim} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{{}^{\sim+1}\Gamma(\sim+1)}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty \frac{1}{{}^{\sim+1}\Gamma(\sim+1)}\, x^{\sim} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{{}^{\sim}\ \sim\Gamma(\sim)}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}$$

$$= \sim$$

Berikut akan ditunjukkan variansi distribusi Gamma dengan menggunakan Persamaan (2.7), yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{2.18}$$

Terlebih dahulu akan ditentukan :

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, \frac{x^{\sim-1} e^{-\frac{x}{\ }}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\sim+1} e^{-\frac{x}{\ }}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\,dx$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty x^{\sim-1} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty \frac{{}^{\sim+2}\Gamma(\sim+2)}{{}^{\sim+2}\Gamma(\sim+2)}\, x^{\sim+1} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{{}^{\sim+2}\Gamma(\sim+2)}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\int_0^\infty \frac{1}{{}^{\sim+2}\Gamma(\sim+2)}\, x^{\sim+1} e^{-\frac{x}{\ }}\,dx$$

$$= \frac{{}^{\sim}\ {}^{2}(\sim+1)\sim\Gamma(\sim)}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}$$

$$= \sim(\sim + 1) \quad ^2$$

maka diperoleh :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sim(\sim + 1) \quad ^2 - (\sim \quad)^2$$

$$= \sim^2 \quad ^2 + \sim \quad ^2 - \sim^2 \quad ^2$$

$$= \sim \quad ^2$$

2.7 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthy, 2006).

2.7.1 Fungsi Likelihood

Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) bersama dari variabel acak $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta: X)$, maka :

$$L(\theta; X) = f(\theta; X) \tag{2.19}$$

Karena $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ adalah FKP bersama variabel acak yang saling bebas, sehingga :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) \tag{2.20}$$

Selanjutnya persamaan (2.16) disubstitusikan ke persamaan (2.17), maka diperoleh :

$$L(^-; X) = f(x_1; ^-) f(x_2; ^-) \cdots f(x_n; ^-)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; ^-) \tag{2.21}$$

2.7.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi Maksimum *Likelihood* (EML) adalah suatu metode memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\bar{\theta}$ sebagai estimator θ yang memaksimumkan $L(\theta;X)$. Metode EML dapat digunakan jika Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f(\theta;X)$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1, x_2, \cdots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta;X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta;X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta;X) = l(\theta;X)$, dimana $l(\bar{\theta};X) \geq l(\bar{\theta};X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta;X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dL(\bar{\ };X)}{d\bar{\ }}$ (Lee & Wang, 2003).

2.8 Pemilihan Distribusi

Dalam pemilihan model terbaik diperlukan pengujian secara statistik, yaitu menggunakan *Akaike Imformation Criterion* (AIC). AIC adalah suatu ukuran yang relatif dari suatu model statistik. Nilai-nilai AIC digunakan untuk pemilihan model terbaik. Metode AIC didasarkan pada metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE). Perhitungan nilai AIC adalah sebagai berikut :

$$AIC = -2LogL + 2k$$

dengan :

L = maksimum *Likelihood*

k = jumlah parameter.

Pada suatu model dikatakan baik apabila nilai AIC nya paling kecil. AIC banyak digunakan untuk data yang jumlahnya lebih besar bahkan data yang jumlahnya tidak terhingga.