BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang landasan teori yaitu deret Taylor, orde hampiran, orde konvergensi, *computational order of convergence* (*COC*), indeks efisiensi (*efficiency index*), metode Chun-Kim dan konvergensinya, metode Potra-Ptak dan konvergensinya, dan metode Cauchy dan konvergensinya.

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial. Koefisien polinomial tersebut bergantung pada turunan fungsi pada titik yang akan dievaluasi.

Teorema 2.1: (Purcell, 2004) Misalkan f fungsi kontinu yang mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang memuat a. Jadi untuk setiap x di dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (2.1)$$

dengan sisanya (kesalahannya) $R_n(x)$ dinyatakan dengan rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (2.2)$$

dan ξ adalah titik diantara x dan a.

Persamaan (2.2) merupakan galat dari persamaan Taylor. Oleh karena itu, jika $P_n(x)$ adalah persamaan Taylor, maka

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dapat ditulis kembali dengan bentuk

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{2.4}$$

Bukti: Misalkan sebuah polynomial berderajat n dengan fungsi f pada selang terbuka D, maka untuk setiap $x \in D$ berlaku

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n,$$

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} b_n(x-a)^n. \tag{2.5}$$

Kemudian Persamaan (2.5) diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ hingga $f^{(n)}(x)$ menghasilkan bentuk

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots + b_n n(x-a)^{n-1}, \tag{2.6}$$

$$f''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-a) + \cdots + b_n n(n-1)(x-a)^{n-2}, \tag{2.7}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3b_3 + 2\cdot 3\cdot 4b_4(x-a) + \cdots + b_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}, \tag{2.8}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = b_n n!. \tag{2.9}$$

Selanjutnya substitusikan $x = a$ ke Persamaan (2.6) hingga Persamaan (2.9) sehingga berbentuk

$$\begin{aligned} f(a) &= b_0 \\ f'(a) &= b_1 \\ f''(a) &= 2b_2 \\ f'''(a) &= 2\cdot 3b_3 \\ f^{(4)}(a) &= 2\cdot 3\cdot 4b_4 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= b_n n!. \end{aligned}$$

sehingga

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{2.10}$$

Jika Persamaan (2.10) disubstitusikan ke Persamaan (2.5), maka

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \; . \quad \blacksquare \qquad (2.11)$$

Selanjutnya jika Persamaan (2.11) diuraikan, maka inilah yang disebut dengan deret Taylor.

Contoh 2.1 : Tentukan ekspansi deret Taylor orde 1, 2 dan 3 serta grafik dari fungsi $f(x)=e^{3x}+2$ di sekitar $x_0=0$ pada titik $x=1$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan ekspansi deret Taylor, perlu menurunkan $f(x)$ sampai turunan ketiga. Selanjutnya, substitusikan $x_0=0$ pada $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ dan $f'''(x_0)$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x}+2 & \qquad f(0) &= 3 \\ f'(x) &= 3e^{3x} & \qquad f'(0) &= 3 \\ f''(x) &= 9e^{3x} & \qquad f''(0) &= 9 \\ f'''(x) &= 27e^{3x} & \qquad f'''(0) &= 27 \end{aligned}$$

Kemudian diuraikan dalam bentuk deret Taylor orde 1, 2 dan 3, maka diperoleh nilai hampiran fungsi $f(x)$ sebagai berikut:

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$
$$=3+3x.$$
$$P_1(1)=6.$$

$$P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2,$$
$$=3+3x+\frac{9}{2}x^2.$$
$$P_2(1)=\frac{21}{2}.$$

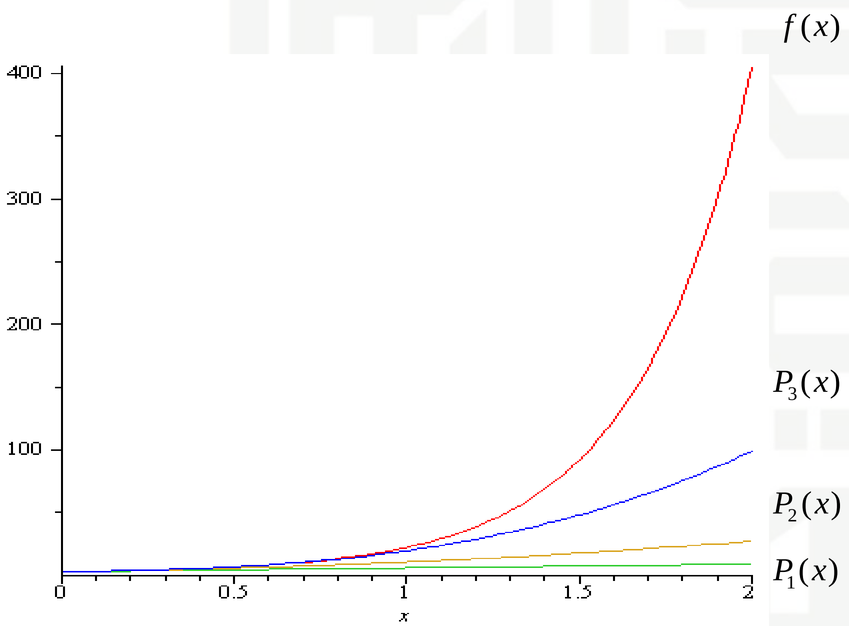
$$P_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3,$$
$$=3+3x+\frac{9}{2}x^2+9x^3.$$

$P_3(1) = \dfrac{39}{2}$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh nilai-nilai hampiran polinomial $P_1(1) = 6$, $P_2(1) = \dfrac{21}{2}$ dan $P_3(1) = \dfrac{39}{2}$, dengan nilai sejati fungsi tersebut adalah

$$f(1) = e^3 + 2 = 21.08553692$$

Untuk lebih jelas, $f(x)$, polinomial $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ di plotkan pada gambar sebagai berikut



Gambar 2.1 Hampiran Fungsi $f(x) = e^{3x} + 2$ **Menggunakan Deret Taylor**

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh nilai hampiran orde 1, 2 dan 3. Semakin tinggi orde hampiran dari fungsi tersebut maka akan semakin mendekati nilai sejati.

2.2 Orde Hampiran

Definisi 2.1 (Munir, 2003) Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \le K|h^n|$ dengan K merupakan konstanta dan $K > 0$, maka dapat dikatakan $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ dapat ditulis

$$f(h) \approx p(h) + O(h^n) \tag{2.12}$$

Jika nilai n semakin tinggi maka galat semakin kecil karena h umumnya bernilai kecil sehingga mengakibatkan penghampiran fungsi semakin teliti. Andaikan suatu fungsi dihampiri deret Taylor

$$x_{n+1} = x_n + h \text{ dengan } n = 0,1,\ldots, \tag{2.13}$$

adalah titik sepanjang h, maka hampiran $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i yaitu

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + \frac{(x_{ni+1} - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \ldots + \frac{(x_{n+1} - x_n)^n}{n!} f^n(x_n) + R_n(x_{n+1}) \\ &= f(x_n) + \frac{h}{1!} f'(x_n) + \frac{h^2}{2!} f''(x_n) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_n) + R_n(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan

$$\begin{aligned} R_n(x_{n+1}) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t), \\ &= O(h^{n+1}), x_n < t < x_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Maka Persamaan (2.15) menjadi

$$f(x_{n+1}) = \sum_{k}^{n} \frac{h^{(k)}}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1})).$$

2.3 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu tingkat percepatan suatu metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi. Adapun definisi yang menyatakan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut

Definisi 2.2 (Rostami dan Esmaili, 2014) : Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$, yang konvergen menuju α. Kemudian, dinyatakan bahwa orde konvergensi dari deret adalah p, jika terdapat sebuah konstanta real $c \neq 0$ yang disebut sebagai bilangan asimtotik galat (*asymptotic error constant*), sedemikian hingga,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=c \tag{2.16}$$

Untuk $p=2,3,\ldots$, maka deret konvergen kuadratik, kubik dan seterusnya.

Definisi 2.3 (Rostami dan Esmaili, 2014) : Misalkan $e_n=x_n-\alpha$ adalah galat pada iterasi ke-n, maka dapat didefinisikan

$$e_{n+1}=ce_n^{\,p}+\mathrm{O}(e_n^{\,p+1}), \tag{2.17}$$

sebagai persamaan kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan p adalah orde konvergensi dan c adalah konstanta asimtotik (koefisien orde galat ke-k).

Contoh 2.2: Buktikan bahwa metode Newton memilki konvergensi kuadratik, dengan persamaan $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Penyelesaian :

Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)$, sehingga $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(x)\neq 0$, $e_n=x_n-\alpha$ dan $c_j=\dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j=2,3,\ldots$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar α diperoleh

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3+\cdots.$$

Jika $x=x_n$, maka

$$f(x_n)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x_n-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3+\cdots.$$

Oleh karena $f(\alpha)=0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, diperoleh

$$f(x_n)=f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3+O(e_n^4). \tag{2.18}$$

Dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.18) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right), \tag{2.19}$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.20}$$

Selanjutnya dengan melakukan langkah yang sama, ekspansi deret Taylor untuk fungsi $f'(x)$ di sekitar α, menghasilkan

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n-\alpha) + f'''(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!} + \cdots \\ &= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3), \\ &= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}\right), \\ &= f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Jika Persamaan (2.17) dibagi dengan Persamaan (2.18), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)e_n + (e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))} \\ &= \frac{e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + O(e_n{}^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3)} \end{aligned}$$

Misalkan $t = 2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3)$ dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots,$$

diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \times (1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3)) + (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3))^2 - (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3))^3 + \cdots)$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \times (1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n{}^2 + \cdots)$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.22}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.22) disubstitusikan ke persamaan Newton di atas, sehingga

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)).$$

Setelah disederhanakan, didapatkan

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \blacksquare \qquad (2.23)$$

Jelas terlihat pada Persamaan (2.23) $p = 2$, berarti terbukti jika metode Newton memiliki konvergensi kuadratik.

Definisi 2.4: *Computational Order of Convergence* (Sharma dkk, 2011)
Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_{n-1}, x_n dan x_{n+1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α. Kemudian *computational order of convergence* (*COC*) yang dilambangkan dengan ρ dapat ditaksir menggunakan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|}. \qquad (2.24)$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, *computational order of convergence* (*COC*) dari suatu barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ adalah

$$\rho \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}. \qquad (2.25)$$

Contoh 2.3: Diketahui fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dengan menggunakan metode Newton tentukan iterasi untuk menetukan akar persamaan $\alpha = 1{,}365230013$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1$ dan ketelitian $e = 10^{-8}$

Penyelesaian:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$f''(x) = 3x^2 + 8x$$

Subtitusikan x_0 ke persamaan metode Newton diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$= 1,000000000 - \frac{(-5,000000000)}{11,00000000},$$

$$= 1,454545455.$$

dengan menggunakan cara yang sama diperoleh

$$x_2 = 1,36890040,\ x_3 = 1,36523660 \text{ dan } x_4 = 1.36523001$$

Menggunakan tiga iterasi awal yaitu x_0, x_1 dan x_2 maka diperoleh

$$\rho_1 \approx \frac{\ln|(x_2 - \alpha)/(x_1 - \alpha)|}{\ln|(x_1 - \alpha)/(x_0 - \alpha)|},$$

$$= \frac{\ln|(1,36890040 - 1,365230013)/(1,45454545 - 1,365230013)|}{\ln|(1,45454545 - 1,365230013)/(1,00000000 - 1,365230013)|},$$

$$= 2,26639005.$$

Selanjutnya akan ditampilkan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil *COC* Metode Newton untuk Fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	*COC*
0	1,000000000	0,454545455	0,365230013	-
1	1,454545455	4,54545455e-01	8,93154411e-02	0,00000000
2	1,368900401	8,56450535e-02	3,67038766e-03	2,26639005
3	1,365236600	3,66380087e-03	6,58678802e-06	1,98096184
4	1,36523001	6,58676675e-06	2,12697640e-11	1,99957558

Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa nilai *COC* konvergen ke 2. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode Newton adalah dua atau kuadratik

2.4 Indeks Efisiensi

Definisi 2.5 (Rostami dan Esmaili, 2014): Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh

$$IE = p^{1/r}, \tag{2.26}$$

dimana p adalah orde konvergensi dari dari suatu metode.

Nilai indeks efisiensi menunjukkan seberapa efektifnya sebuah metode dalam menyelesaikan persamaan nonlinear. Semakin besar nilai indeks efisiensi, maka semakin efektif metode tersebut.

Sebagai contoh, metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, nilai indeks efisiensi metode Newton adalah $2^{1/2} = 1,414$. Sedangkan, metode Potra-Ptak memiliki orde konvergensi tiga dan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan, $f(y_n)$ maka nilai indeks efisiensi metode Potra-Ptak adalah $3^{1/3} = 1,442$.

2.5 Metode Chun-Kim dan Konvergensinya

Pandang persamaan metode Chun-Kim (Changbum Chun-Yong II Kim, 2010) sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n) + 2f(x_n)f'(x_n)^2}{2f'(x_n)^3}, \tag{2.27}$$

Persamaan (2.27) merupakan metode Chun-Kim dengan tiga evaluasi fungsi, yaitu dan $f(x_n)$, $f'(x_n)$, dan $f''(x_n)$ dan memiliki orde konvergensi tiga. Berikut ini dijelaskan mengenai orde konvergensi metode Chun-Kim.

Teorema 2.2 (Changbum Chun-Yong II Kim, 2010): Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya pada interval (a, b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a, b)

dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, metode iterasi pada Persamaan (2.24) memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = (2c_2{}^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.28}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)$, sehingga $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(x)\neq 0$, $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \ldots$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar α diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots,$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.29}$$

Selanjutnya, diekspansikan fungsi $f'(x_n)$ di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + f'''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + \cdots,$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.30}$$

Dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar α menghasilkan

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3e_n + O(e_n^2)). \tag{2.31}$$

Selanjutnya, jika $f(x_n)$ dikuadratkan, maka menghasilkan

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2(e_n^2 + 2c_2e_n^3 + (2c_3 + c_2{}^2)e_n^4 + O(e_n^5)). \tag{2.32}$$

Kemudian kalikan Persamaan (2.31) dan Persamaan (2.32), diperoleh

$$f(x_n)^2 f''(x_n) = f'(\alpha)^3(2c_2e_n^2 + (4c_2{}^2 + 6c_3)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.33}$$

Selanjutnya, jika $f'(x_n)$ dikuadratkan dan dikali dua menghasilkan

$$2f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^2(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.34}$$

Berdasarkan Persamaan (2.29) dan Persamaan (2.34) diperoleh

$$2f(x_n)f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^3(2e_n + 10c_2e_n^2 + (14c_3 + 16c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.35}$$

Selanjutnya Persamaan (2.33) ditambah Persamaan (2.35) diperoleh

$$f(x_n)^2 f''(x_n) + 2f(x_n)f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^3(2e_n + 12c_2e_n^2 + (20c_3 + 20c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.36}$$

Selanjutnya $f'(x_n)$ pangkat tiga dan dikali dua menghasilkan

$$2f'(x_n)^3 = f'(\alpha)^3(2 + 12e_n + (18c_2 + 24c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.37}$$

Jika Persamaan (2.36) dibagi Persamaan (2.37)

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)^2 f''(x_n) + 2f(x_n)f'(x_n)^2}{2f'(x_n)^3} &= \frac{f'(\alpha)^3(2e_n + 12c_2e_n^2 + (20c_3 + 20c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)^3(2 + 12e_n + (18c_2 + 24c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3))} \\ &= \frac{2e_n + 12c_2e_n^2 + (20c_3 + 20c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)}{2 + 12e_n + (18c_2 + 24c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)} \\ &= \frac{e_n + 6c_2e_n^2 + (10c_3 + 10c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 6e_n + (9c_2 + 12c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)}\end{aligned}$$

Misalkan $t = 6e_n + (9c_2 + 12c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)$ dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

Maka

$$\frac{f(x_n)^2 f''(x_n) + 2f(x_n)f'(x_n)^2}{2f'(x_n)^3} = e_n + (c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.38}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.38) ke Persamaan (2.27), diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n + (c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)),$$

atau

$$e_{n+1} = (2c_2{}^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \blacksquare \tag{2.39}$$

Persamaan (2.39) merupakan Persamaan galat metode Chun-Kim yang menunjukkan bahwa metode Chun-Kim memiliki orde konvergensi kubik.

2.6 Metode Potra Ptak dan Konvergensinya

Pandang persamaan metode Potra Ptak (Kim dkk, 2010) sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.40}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.41}$$

Metode Potra Ptak memiliki tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$. Selanjutnya akan dibahas orde konvergensi metode Potra Ptak.

Teorema 2.3 (Kim dkk, 2010): Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya pada interval (a, b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a, b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, metode iterasi pada Persamaan (2.40) memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.42}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan bahwa $f(\alpha) = 0$, $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \ldots$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya diaproksimasikan fungsi f di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots,$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.43}$$

Selanjutnya, diekspansikan fungsi $f'(x_n)$ di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + f'''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + \cdots,$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)) \tag{2.44}$$

Jika Persamaan (2.43) dibagi dengan Persamaan (2.44) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))}$$

$$= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}$$

Misalkan $t = 2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3)$ dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \times (1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3)) + (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3))^2 - (2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + O(e_n{}^3))^3 + \cdots)$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + O(e_n{}^4)) \times (1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n{}^2 + \cdots),$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.45}$$

Selanjutnya,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$= x_n - \left(e_n - c_2e_n^2 + (2c_2{}^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right),$$

$$= e_n + \alpha - \left(e_n - c_2e_n^2 + (2c_2{}^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right),$$

$$= \alpha + c_2e_n^2 - (2c_2{}^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.46}$$

atau dapat dibentuk

$$y_n = \alpha + s_n, \tag{2.47}$$

dengan

$$s_n = c_2e_n^2 - (2c_2{}^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.48}$$

Kemudian, berdasarkan ekspansi deret Taylor di sekitar α, maka $f(y_n)$ dapat dibentuk menjadi

$$f(y_n) = f(\alpha) + (y_n - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \cdots$$

Oleh karena $f(\alpha)=0$ dan $y_n=\alpha+s_n$,

$$f(y_n)=f'(\alpha)(s_n+c_2{s_n}^2+c_3{s_n}^3+c_4{s_n}^4+\cdots). \qquad (2.49)$$

Substitusikan Persamaan (2.48) ke Persamaan (2.49), diperoleh

$$f(y_n)=f'(\alpha)(c_2e_n^2+(2{c_2}^2-2c_3)e_n^3+(5c_2^3-7c_2c_3+3c_4)e_n^4+O(e_n^5)). \qquad (2.50)$$

Selanjutnya, jika Persamaan (2.50) dibagi dengan Persamaan (2.44), maka diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}=\frac{f'(\alpha)(c_2e_n^2+(2{c_2}^2-2c_3)e_n^3+(5c_2^3-7c_2c_3+3c_4)e_n^4+O(e_n^5))}{f'(\alpha)(1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4))},$$

$$=\frac{c_2e_n^2+(2{c_2}^2-2c_3)e_n^3+(5c_2^3-7c_2c_3+3c_4)e_n^4+O(e_n^5)}{1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4)}.$$

Misalkan $t=2c_2e_n+3c_3e_n^2+\cdots$, dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots,$$

diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}=(c_2e_n^2+(2{c_2}^2-2c_3)e_n^3+(5c_2^3-7c_2c_3+3c_4)e_n^4+O(e_n^5))$$

$$\times(1-(2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4))+(2c_2e_n+3c_3e_n^2$$

$$+4c_4e_n^3+O(e_n^4))^2-(2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4))^3+\cdots),$$

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}=c_2e_n^2+(2c_3-4c_2^2)e_n^3+(13c_2^2+3c_4-14c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5). \qquad (2.51)$$

Selanjutnya, substitusi Persamaan (2.51) dan Persamaan (2.45) ke Persamaan (2.40) menghasilkan

$$x_{n+1}=x_n-(e_n+c_2e_n^2+(2{c_2}^2-2c_3)e_n^3+O(e_n^4))$$

$$-(c_2e_n^2+(2c_3-4c_2^2)e_n^3+(13c_2^2+3c_4-14c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5)),$$

$$=x_n-(e_n-2c_2e_n^3+(7c_2c_3-9c_2^3)e_n^4+O(e_n^5)). \qquad (2.52)$$

Oleh karena $x_{n+1}=e_{n+1}+\alpha$ dan $x_n=e_n+\alpha$,

$$e_{n+1}+\alpha=e_n+\alpha-(e_n-2c_2e_n^3+(7c_2c_3-9c_2^3)e_n^4+O(e_n^5)),$$

atau

$$e_{n+1} = 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4). \blacksquare \tag{2.53}$$

Persamaan (2.53) merupakan persamaan galat metode Potra Ptak yang menunjukkan bahwa metode Potra Ptak memiliki orde konvergensi atau kubik.

2.7 Metode Cauchy dan Konvergensinya (Grou, 2004)

Misalkan f adalah sebuah fungsi real dengan akar α, maka persamaan $f(x) = 0$ mempunyai solusi $f(\alpha) = 0$. Kita memandang

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \frac{f^{(''')}(x_n)}{3!}(x - x_n)^3 + \ldots +$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - x_n)^n + R_n(x), \tag{2.54}$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_n)^{n+1},$$

dan $\xi(x)$ berada antara x dan x_n. Dengan mengambil tiga suku pertama diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2.$$

Oleh karena $f(x) = 0$ diperoleh

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2. \tag{2.55}$$

Persamaan (2.55) merupakan bentuk persamaan kuadrat dalam $(x - x_n)$, dan dengan menggunakan rumus kuadratik diperoleh akar persamaan kuadrat yang menjadi basis bagi penetapan x_{n+1} sebagai berikut:

$$\frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$$

$$\frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 4f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)4f(x_n) + 4f(x_n)f(x_n) = 0$$

$$\frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 4f(x_n) + 4f(x_n)f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)4f(x_n)$$

$$f'(x_n)^2(x-x_n)^2 - \frac{f''(x_n)}{2}(x-x_n)^2 4f(x_n) + 4f(x_n)f(x_n)$$

$$= f'(x_n)^2(x-x_n)^2 - f'(x_n)(x-x_n)4f(x_n)$$

$$(f'(x_n)(x-x_n)+2f(x_n))^2 = (x-x_n)^2\left(f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)\right)$$

$$\frac{(f'(x_n)(x-x_n)+2f(x_n))^2}{(x-x_n)^2} = \left(f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)\right)$$

$$\left(\frac{f'(x_n)(x-x_n)+2f(x_n)}{(x-x_n)}\right)^2 = \left(f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)\right)$$

$$\left(f'(x_n)+\frac{2f(x_n)}{(x-x_n)}\right) = \pm\sqrt{f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)}$$

$$\frac{2f(x_n)}{(x-x_n)} = -f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)}$$

maka

$$(x-x_n) = \frac{-2f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 4\frac{f''(x_n)}{2}f(x_n)}} \tag{2.56}$$

Setelah disederhanakan Persamaan (2.56) menjadi

$$x \approx x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2L_f}}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.57}$$

dengan

$$L_f = \frac{f''(x_n)\cdot f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Persamaan (2.57) merupakan metode Cauchy yang melibatkan evaluasi fungsi $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$. Selanjutnya dibahas orde konvergensi metode Cauchy.

Teorema 2.4 (Grou dan M. Nugraha, 2004): Asumsikan bahwa fungsi $f: D \subset R \to R$ untuk interval buka D yang memiliki akar sederhana $\alpha \in D$, maka persamaan di atas mempunyai orde konvergensi tiga dengan persamaan *error*

$$e_{n+1} = -c_3 e_n^3 - 3c_4 e_n^4 + O(e_n^5). \tag{2.58}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan bahwa $x_n = \alpha + e_n$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \ldots$. Selanjutnya diaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n dengan menggunakan deret Taylor, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots,$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.59}$$

Selanjutnya, diekspansikan fungsi $f'(x_n)$ di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + f'''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + \cdots,$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.60}$$

Dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar α menghasilkan

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^2)). \tag{2.61}$$

Jika Persamaan (2.59) dibagi dengan Persamaan (2.60) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3))},$$

$$= \frac{e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)}$$

Misalkan $t = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O(e_n{}^3)$ dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=(e_n+c_2e_n{}^2+c_3e_n{}^3+O(e_n{}^4))\times(1-(2c_2e_n+3c_3e_n{}^2+O(e_n{}^3))+$$

$$(2c_2e_n+3c_3e_n{}^2+O(e_n{}^3))^2-(2c_2e_n+3c_3e_n{}^2+O(e_n{}^3))^3+\cdots)$$

$$=(e_n+c_2e_n{}^2+c_3e_n{}^3+O(e_n{}^4))\times(1-2c_2e_n+(4c_2^2-3c_3)e_n{}^2+\cdots),$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=e_n-c_2e_n^2+(2c_2^2-2c_3)e_n^3+O(e_n^4)\,. \tag{2.62}$$

Berdasarkan Persamaan (2.59) dan Persamaan (2.61) maka

$$f''(x_n)f(x_n)=f'(\alpha)^2(2c_2e_n+(2c_2^2+4c_3)e_n^2+O(e_n^3)). \tag{2.63}$$

Selanjutnya, jika $f(x_n)$ dikuadratkan maka menghasilkan

$$f(x_n)^2=f'(\alpha)^2(e_n^2+2c_2e_n^3+(2c_3+c_2{}^2)e_n^4+O(e_n^5))\,. \tag{2.64}$$

Kemudian Persamaan (2.63) dibagi Persamaan (2.64)

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}=\frac{f'(\alpha)^2(2c_2e_n+(2c_2^2+4c_3)e_n^2+O(e_n^3))}{f'(\alpha)^2(e_n^2+2c_2e_n^3+(2c_3+c_2^2)e_n^4+O(e_n^5))}$$

Misalkan $t=\dfrac{e_n^2+2c_2e_n^3+(2c_3+c_2^2)e_n^4+O(e_n^5)}{e_n^2}-1$ dan dengan menggunakan deret geometri

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$$

diperoleh

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}=2c_2e_n+(-6c_2^2+6c_3)e_n^2+(-8c_2^3+16c_2c_3-12c_4)e_n^3$$

$$+O(e_n^4)\,. \tag{2.65}$$

Selanjutnya untuk persamaan $\sqrt{1-2L_f}$ dengan menggunakan deret binomial dengan bentuk

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots,$$

diperoleh

$$(1-2L_f)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}L_f + \frac{1}{8}L_f^{\ 2} + \cdots,$$

$$1+\sqrt{1-2L_f} = 2 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 6_3)e_n^2 + O(e_n^3). \qquad (2.66)$$

Subtitusi Persamaan (2.66), (2.65) dan (2.62) ke Persamaan (2.57) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n + c_3e_n^3 + 3c_4e_n^4 + O(e_n^5)).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$,

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n + c_3e_n^3 + 3c_4e_n^4 + O(e_n^5)).$$

Sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = -c_3e_n^3 - 3c_4e_n^4 - O(e_n^5). \ \blacksquare \qquad (2.67)$$

Persamaan (2.67) merupakan orde konvergensi dari Persamaan (2.57).