BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat *(dependent variable)* terhadap satu atau lebih variabel bebas *(independent variable)* disebut persamaan diferensial. Secara garis besar persamaan diferensial dapat dikelompokkan ke dalam dua kelompok yaitu:

a. Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya mempunyai satu peubah bebas, peubah bebas biasanya disimbolkan dengan x.

b. Persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) adalah persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih peubah bebas (Rinaldi, 2013).

Definisi 2.1 (Roni, 2011) Diberikan fungsi $\boldsymbol{f}: R^n \to R^n$ dengan $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T \in R^n$. Fungsi $\boldsymbol{f}$ dikatakan diferensiabel di $x_0 \in R^n$ jika terdapat transformasi linier $D\boldsymbol{f}(x_0) \in L(R^n)$ dengan $L(R^n)$ menyatakan himpunan semua operator linier pada R^n sehingga:

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{f}(x_0 + h) - \boldsymbol{f}(x_0) - D\boldsymbol{f}(x_0)h\|}{\|h\|} = 0 \qquad (2.1)$$

$D\boldsymbol{f}(x_0)$ disebut turunan $\boldsymbol{f}$ di x_0 dan $h \in R^n$. Jika suatu fungsi diketahui diferensiabel maka turunan parsialnya selalu ada.

Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial maka akan membentuk sistem persamaan diferensial. Diberikan sistem persamaan diferensial:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, x) \qquad (2.2)$$

dengan $\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$, dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$

Sistem persamaan diferensial (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n),
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

dengan f_i adalah fungsi kontinu pada [a,b] dari $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$ untuk $i = 1, 2, \dots ,n$

Bentuk sistem persamaan diferensial linier dengan n fungsi tak diketahui dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n .
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Selanjutnya sistem persamaan (2.4) dapat dituliskan dalam bentuk

$$
\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{2.5}
$$

dengan A matrik ukuran $n \times n, A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$

$$
\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right]^T,
$$

$$
\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T .
$$

Jika sistem persamaan diferensial (2.3) tidak dapat dibentuk menjadi persamaan (2.5) maka sistem persamaan diferensial (2.3) disebut sistem persamaan diferensial non linier. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan dalam persamaan (2.2) maka $\bar{x}$ titik equilibrium dari persamaan (2.2).

Suatu sistem dinamik dikatakan setimbang jika sistem tidak berubah sepanjang waktu. Secara formal titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari Sistem (2.2) didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Meiss, 2007) Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) sistem (2.2) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Teorema 2.1 (Subiono, 2010). Diberikan persamaan diferensial $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dengan $k \le n$.

a. Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotis, jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

b.Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil, jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) \le 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

c. Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $\Re e(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$.

2.2 Matriks Jacobi

Pandang kembali sistem persamaan diferensial non linier (2.3):

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)$$

maka dengan menghitung turunan parsial masing-masing $f_1, f_2, \cdots, f_n$, didapat bentuk matriks Jacobiannya sebagai berikut:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

yaitu matriks yang berukuran $n \times n$. Matriks ini sering kali ditulis sebagai matriks $J(x)$:

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j} \tag{2.6}$$

Contoh 2.1:

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1\, x_2$$

$$\frac{df_2}{dt} = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$$

Tentukan titik equilibrium dari sistem persamaan diferensial berikut beserta kestabilannya:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1\, x_2$$

$$x_1\, x_2 = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ atau}$$

$$x_2 = 0$$

dan

$$\frac{df_2}{dt} = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 0$$

$$0 + x_2^{\,2} = 0$$

$$x_2^{\,2} = 0$$

didapat titik equilibriumnya $(x_1, x_2) = (0,0)$

Misalkan:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1\, x_2 = g_1$$

$$\frac{df_2}{dt} = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = g_2$$

dengan menurunkan x_1 dan x_2 terhadap g_1 dan g_2 maka diperoleh:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2x_2$$

Matriks Jacobian dari x_1 dan x_2 menjadi:

$$J(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

Maka berdasarkan Teorema 2.1 dapat disimpulkan (0,0) stabil karena nilai $\Re e(\lambda_{1,2}) = 0$.

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor x yang tidak nol di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari matriks A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu

$$Ax = \lambda x,$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A dan x disebut sebagai vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ. Diketahui bahwa $\lambda = \lambda I$, maka subsitusikan kedalam $Ax = \lambda x$ menghasilkan:

$$Ax = \lambda \mathrm{I} x,$$

atau

$$\det(A - \lambda I)x = 0.$$

Berikut diberikan contoh mengenai nilai eigen.

Contoh 2.2:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A!

Penyelesaian:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2(-\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 1$$

Sehingga nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_{1,2} = 2$ dan $\lambda_3 = 1$.

untuk $\lambda_{1,2} = 2$,

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_3$$

Misalkan $x_2 = t$ dan $x_3 = s$, maka $x_1 = -s$. Sehingga diperoleh vector x sebagai berikut:

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{1,2} = 2$ adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda_3 = 1$,

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 0 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 &= -2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Misalkan $x_3 = s$, maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$. Sehingga diperoleh vector x sebagai berikut:

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 1$ adalah

$$x_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dipakai apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit ditentukan. Karena kriteria kestabilan Routh-Hurwitz ini tidak melihat tanda bagian real dari nilai eigen atau akar-akar persamaan karakteristik secara langsung melainkan melihat koefisien dari persamaan karakteristik.

Teorema 2.2 (**Risya Radhianti, 2012).** Diberikan persamaan karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_k \tag{2.7}$$

Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk $k = 2, 3, 4$ disebut bahwa titik *equilibrium* stabil jika dan hanya jika:

$$k = 2 \qquad a_1 > 0,\ a_2 > 0$$

$$k = 3 \qquad a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1 a_2 > a_3$$

$$k = 4 \qquad a_1 > 0,\ a_3 > 0, a_4 > 0,\ a_1 a_2 a_3 > a_3^{\ 2} + a_1^{\ 2} a_4$$

Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik equilibrium stabil asimtotik lokal.

2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4

Penyelesaian persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) dengan metode Runge Kutta orde 4 adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(x, y)$ yang diketahui dengan menggunakan persamaan umum di bawah ini.

Di berikan: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

Bentuk umum metode Runge-Kutta Orde 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.8}$$

dengan

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{2.9}$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \tag{2.10}$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \tag{2.11}$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3\ y_n + h.k_3) \tag{2.12}$$

Contoh 2.3:

Selesaikan sistem persamaan diferensial dengan menggunakan metode runge kutta orde 4 sampai Iterasi 1:

$$\frac{dx}{dt} = x + xy$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

dengan: $y_0 = 1.5$

$$x_0 = 0$$

$$h = 0.05$$

Misalkan: $f(x, y) = x + xy$

$$g(x, y) = x + y$$

Rumus iterasi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Iterasi 1 $x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ &= hf(x_0, y_0) \\ &= hf(0, 1.5) \\ &= (0{,}05)(0 + 0(1.5)) = 0 \end{aligned}$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2})$$

$$= hf(x_0 + \frac{k_1}{2}, y_0 + \frac{l_1}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(0 + \frac{0}{2}\right)\left(1{,}5 + \frac{0{,}075}{2}\right)\right) = 0$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$= hf(x_0 + \frac{k_2}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(0 + \frac{0}{2}\right)\left(1{,}5 + \frac{0{,}076875}{2}\right)\right) = 0$$

$$k_4 = hf(x_n + hk_3 \; y_n + h.k_3)$$

$$= hf(x_0 + hk_3\,,\, y_0 + h.k_3)$$

$$= 0{,}05\left((0 + 0.05(0)) + (0 + 0.05(0))(1{,}5 + 0.05(0))\right) = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1}{6}(\, 0 + 2(0) + 2(0) + 0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$l_1 = hg(x_n, y_n)$$

$$= hg(x_0, y_0)$$

$$= g(0, 1.5)$$

$$= (0{,}05)(0 + \; (1.5)) = 0{,}075$$

$$l_2 = hg(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2})$$

$$= hg(x_0 + \frac{k_1}{2}, y_0 + \frac{l_1}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(1{,}5 + \frac{0{,}075}{2}\right)\right) = 0{,}076875$$

$$l_3 = hg\,(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2})$$

$$= hg\,(x_0 + \frac{k_2}{2}, y_0 + \frac{l_2}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(1{,}5 + \frac{0{,}076875}{2}\right)\right) = 0{,}076921875$$

$$l_4 = hg\,(x_n + hk_3\,, y_n + hl_3\,)$$

$$= hg\,(x_0 + hk_3\,, y_0 + hl_3\,)$$

$$= 0{,}05((0 + 0.05(0)) + (1{,}5 + 0.05(0{,}076921875))) = 0{,}0751923047$$

$$y_1 = 1.5 + \frac{1}{6}(\,0{,}075 + 2(0{,}076875) + 2\,(0{,}076921875) + (0{,}0751923047)$$

$$= 1{,}5762976757$$

Jadi di dapat $(x_1, y_1) = (0, 1.5762976757)$