BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks merupakan suatu daftar bilangan yang disusun dalam sebuah empat persegi panjang didalam baris-baris atau kolom-kolom, dan ditempatkan dalam kurung. Pada umunya dilambangkan dengan huruf besar.

Definisi 2.1. (Rinaldi Munir, 2005) Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk barisan dan kolom. Matriks $m \times n$ yang menunjukkan matriks dengan m baris dan n kolom. Selanjutnya diberikan sistem persamaan linier sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad & \qquad \qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Sehingga Persamaan (2.1) dapat dibentuk menjadi matriks sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Dengan dinotasikan matriks A yang berukuran $n \times n$, adalah:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan } a_{ij} \epsilon \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},
$$

diperoleh sistem persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \quad dx_2 \quad \dots \quad dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh :

$$
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \tag{2.3}
$$

Untuk memahami Persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1 :

Carilah $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)$ untuk $f_1 = 2x_1+5x_2$ dan $f_2 = 8x_1+12x_2$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1+5x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(8x_1 + 12x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(8x_1 + 12x_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}. \tag{2.4}$$

selanjutnya berlaku hubungan :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.5}$$

Jika A adalah matriks simetri, maka dipenuhi :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

2.2 Jenis-Jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yang masuk pada pembahasan matriks yang akan dipergunakan dalam pembahasan proposal ini, sebagai berikut.

2.2.1 Matriks Diagonal

Definisi 2.2 (Howard Anton, 2004) Suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya adalah nol kecuali yang terletak pada diagonal utama. Matriks diagonal umum D berukuran $n \times n$. Dapat ditulis sebagai

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2:

Bentuklah satu bentuk matriks diagonal berukuran 3×3?

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Matriks Segitiga

Definisi 2.3 (Howard Anton, 2004) Matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas.

Contoh 2.3:

Buatlah satu bentuk matriks segitiga atas dan segitiga bawah.

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Bentuk segitiga atas pada matriks A dan matriks segitiga bawah pada matriks B.

2.2.3 Matriks Nonsingular

Definisi 2.5 (Howard Anton, 1987) Matriks nonsingular adalah matriks persegi yang determinannya tidak sama dengan nol.

2.3 Determinan Matriks

Definisi 2.4 (Howard Anton, 1987) Determinan adalah jumlah semua hasil kali berdasarkan elementer-elementernya dari suatu matriks A dinyatakan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Contoh 2.4:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ hitunglah $|A|$

Penyelesaian :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$= [1.5.9 + 2.6.7 + 3.(-4).(-8)] - [3.5.7 + 1.6.(-8) + 2.(-4).9]$

$= [(45) + (84) + (96)] - [(105) + (-48) + (-72)]$

$= 240$

2.4 *Rank* Matriks

Defenisi 2.6 (Howard Anton, 1987) Dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut *rank* dari A dan dinyatakan sebagai *rank*(A). Dapat dilihat pada contoh sebagai berikut.

Contoh 2.5:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan *rank* (A)

Penyelesaian :

Untuk menentukan *rank* dari suatu matriks tentukan determinannya terlebih dahulu, determinan dari A adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= (2+24-18)-(12+9-8)$$
$$= -5$$

$|A| = -5 \neq 0$, lalu dicari reduksi baris dari matriks A:

$$A \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 - 4b_1 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \frac{b_2}{5}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 - 2b_2 \\ \\ b_3 + 5b_2 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1)b_3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 + 15b_3 \\ b_2 - 9b_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terdapat matriks identitas berdimensi 3×3, sehingga rank matriks adalah 3.

2.5 Invers Matriks

Definisi 2.7 (Howard Anton, 1987) Invers adalah jika A adalah matriks bujur sangkar dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B sebagai invers dari A.

Contoh 2.6 :

Buktikan bahwa invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.8 (Howard Anton, 2004) Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$**,** yaitu:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{2.7}$$

Untuk skalar sebarang $\boldsymbol{\lambda}$**.** Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Untuk mendapatkan nilai eigen, dapat ditulis:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x}$$

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) merupakan persamaan karakteristik A, yang digunakan agar λ menjadi nilai eigen, harus didapat satu solusi taknol dari persamaan diatas jika $\det(\lambda I - A) = 0$ atau $|\lambda I - A| = 0$.

Contoh 2.7 :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A dapat menggunakan persamaan $\det\ (\lambda I - A) = 0$ dengan hasil matriks:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

maan karakteristik adalah $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, sehingga diperoleh nilai eigennya dari matriks A,

$\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

dari nilai eigen tersebut dapat kita peroleh vektor eigen dengan mensubtitusikan matriks dan nilai eigennya.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapat $x_1 = -2x_3$ dan $x_2 = x_3$, misalkan $x_2 = r$, maka:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2r \\ r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh vektor eigen dari nilai eigen $\lambda_1 = 1$ yaitu: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jika $\lambda_{2,3} = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapat $-x_1 = x_3$ misalkan $x_3 = t$, maka:

$$s_{2,3} = \begin{bmatrix} -t \\ r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh vektor eigen dari nilai eigen $\lambda_{2,3} = 2$ yaitu: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Maka vektor eigen dari matriks A yaitu: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.7 Matriks Jordan

Defenisi 2.9 (Roger A Horn, 1990) Suatu matriks Jordan J berukuran $n \times n$ adalah bentuk matriks Jordan jika berisi blok-blok Jordan, ditempatkan sepanjang diagonal, dengan entri-entri lainnya adalah nol.

$$\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

Dengan $J_1(\lambda_1),...,J_k(\lambda_k)$ adalah matriks blok Jordan dan 0 adalah matriks nol.

Selanjutnya pada pembahasan ini diberikan sembarang matriks A berukuran $n \times n$ yang akan diubah ke bentuk matriks Jordan. Bentuk matriks Jordan memiliki sifat yaitu diagonal utama pada matriks Jordan berkaitan dengan nilai eigen dari matriks A dan elemen-elemen yang lain diatas diagonal utama bernilai 1 atau 0 dan elemen yang lain bernilai 0. Bentuk kanonik Jordan dibentuk melalui proses diagonalisasi. Dari diagonalisasi maka akan dapat matriks bentuk Jordan

$$S^{-1}AS = J \tag{2.9}$$

dimana S adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisir dari matriks A. Berikut diberikan definisi matriks blok Jordan.

Definisi 2.10 (I.N. Herstein, 2000) Sebuah matriks blok Jordan $J_k(\lambda)$ adalah matriks segitiga atas $k \times k$ dengan bentuk

$$J_k(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & & 0\\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1\\ 0 & & & & \lambda_k\end{bmatrix}$$

nilai eigen λ muncul n kali pada diagonal utama, angka 1 muncul $n-1$ kali pada superdiagonal (diatas diagonal utama) sedangkan entri-entri lainnya nol.

Contoh 2.8 :

Tentukan banyak blok Jordan dibawah ini

$$J=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

Penyelesaian :

Matriks J merupakan matriks blok Jordan yang terdiri dari tiga blok, yaitu $J_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, J_2=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, dan $J_3=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dengan $n=6$.

Berikut ini langkah-langkah secara umum untuk mencari bentuk kanonik Jordan:

1. Matriks A sebarang
2. Tentukan nilai eigen matriks A
3. Tentukan vektor eigen
4. Tentukan matriks S yang terdiri dari vektor eigen
5. Tentukan S^{-1}
6. Tentukan matriks kanonik Jordan dengan $S^{-1}AS=J$.

Contoh 2.9:

Tentukan sebuah matriks kanonik Jordan J dengan mentransformasikan matriks

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Sesuai dengan langkah menentukan bentuk kanonik Jordan, dapat ditentukan terlebih dahulu nilai eigen matriks A

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, diubah dalam bentuk faktor didapat $(\lambda - 2)^3 = 0$ sehingga diperoleh nilai eigennya dari A adalah

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

dari nilai eigen tersebut dapat kita peroleh vektor eigen dengan mensubtitusikan matriks dan nilai eigenya.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari dengan persamaan $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v_1} = 0$. Untuk $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

didapat $2x_3 = x_1$ dan $x_2 = 0$, misalkan $x_3 = t$, maka:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dari vektor $\mathbf{v_1}$ akan dicari $\mathbf{v_2}$ kita harus menggunakan vektor eigen tergeneralisir berlaku persamaan $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$, maka didapat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut, didapat $2x_3 = x_1$ dan $x_2 = 1$, maka:

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ atau } \left(t\mathbf{v_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

maka dihasilkan $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk mencari $\mathbf{v_3}$ dengan persamaan $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}$, maka mendapatkan

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka didapat $2x_3 = 1 + x_1$ jika $x_3 = 0$ maka $x_1 = -1$ dan $x_2 = 0$,

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh vektor eigen yaitu:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan memperoleh nilai eigennya berjumlah n adalah 3. Dan banyaknya vektor 3 maka dapat di diagonalisasikan. maka matriks A dapat didiagonalisasikan untuk mendapatkan matriks Jordan.

Selanjutnya dibentuk matriks $S = (\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3})$ didapat:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Selanjutnya ditentukan } S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.6), akan menghasilkan

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka matriks A dapat dibentuk menjadi matriks Jordan dengan $S^{-1}AS = J$.

2.8 Bentuk Kuadratik

Bagian ini akan dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks juga sifat definit positif maupun sifat definit negatif oleh Lewis (1995). Diberikan bentuk umum persamaan kuadratik sebagai berikut :

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2, \quad (2.10)$$

Bentuk kuadratik di atas dapat diubah ke bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \quad (2.11)$$

Persamaan (2.10) disebut bentuk persamaan kuadratik dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ untuk $i \le n-1$, $j \le n$ dan $c_{ij} \epsilon \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan matriks A adalah matriks yang simetri. Selanjutnya untuk memahami bentuk di atas, maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.10 :

Jabarkan notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j$$

Penyelesaian :

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2\}$$

$$= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2$$

$$= c_{11}{x_1}^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}{x_2}^2$$

$$= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} & x_1c_{12} + x_2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif atau definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh Lewis (1995) yaitu jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika nilai eigen $\lambda_i > 0$, untuk $i = 1,2, \dots, n$.
2. Semi definit positif jika semua nilai eigen $\lambda_i \geq 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan paling tidak salah satu darinya nol.
3. Definit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$
4. Semi definit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan paling tidak salah satu darinya nol.

jika nilai eigen λ_i tidak memenuhi keempat syarat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite*.

Contoh 2.11 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$, akan ditentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian :

Untuk menentukan sifat definit dari matriks A dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut :

$$\det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 6 & 1 \\ 0 & \lambda - 12 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 12) - 0 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 12) = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 12$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 6$, dan $\lambda_2 = 12$, karena $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif.

2.9 Kestabilan Sistem Diskrit

Sebelum kita membahas tentang kestabilan, kita bahas terlebih dahulu tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.11 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}\,(\overline{\mathbf{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Selanjutnya itu berdasarkan (Ogata, 1995) akan diberikan definisi untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut :

Teorema 2.12 (Ogata, 1995) Diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k,$$

Dengan x_k adalah vektor *state* dan A adalah matriks non singular nxn, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S_k simetri dan definit positif yang memenuhi :

$$A^T S_k A - S_k = -Q_k$$

Dengan matriks Q_k adalah matriks simetri, jika Q_k semi definit positif maka sistem stabil.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.12 :

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q_k adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut :

$$A^T S_k A - S_k = -Q_{k,}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} - s_{22} \\ -1.5s_{12} - s_{22} & 0.25s_{11} + s_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut :

$$s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} - s_{22} = 0$$

$$0.25s_{11} + s_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = 4,\ s_{12} = -2,\ s_{22} = 3$ dan dapat dibentuk menjadi :

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matrik definit positif sebagai berikut :

$$\det\ (\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -4 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1.44 \text{ dan } \lambda_2 = 5.56$$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 1.44$, dan $\lambda_2 = 5.56$, karena $\lambda_i > 0,\ i = 1,2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

2.10 Linier Quadratik Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab yang ketiga ini, akan dibahas tentang linear quadratik waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit, kemudian dilanjutkan membahas tentang kendali linier kuadratik dengan umpan balik loop tertutup.

2.10.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan umum masalah kendali optimal waktu diskrit sistem dinamis dengan persamaan dinamik sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \qquad k = 1,2, \dots, n \tag{2.12}$$

dengan kondisi awal x_0, dengan x_k adalah vektor setiap berukuran n dengan kendali input u_k adalah vektor berukuran *m.*

Selanjutnya diberikan fungsi tujuan sebagai berikut :

$$J = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.13}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi tujuan, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut :

Persamaan Hamilton : $$H^k = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.14}$$

Persamaan *state* : $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.15}$$

Persamaan *kostate* : $$-\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.16}$$

Kondisi *stasioner* : $$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.17}$$

2.10.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik. Berdasarkan Lewis (1995) didefinisikan persamaan linier sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \tag{2.18}$$

dengan $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k), \tag{2.19}$$

Pada fungsi tujuan diasumsikan $Q_i, R_i,$ dan S_{i_N}, dimana $i = 1,2,\dots N$ adalah matriks simetri semi definite positif.

Persamaan Hamilton: $H^k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R_i \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k)$ (2.20)

Kemudian Persamaan (2.20) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k,$ (2.21)

Persamaan *costate* : $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = Q\boldsymbol{x}_k + A^T \lambda_{k+1},$ (2.22)

Kondisi satsioner : $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R\boldsymbol{u}_k + B^T \lambda_{k+1},$ (2.23)

Menurut Persamaan (2.23) diperoleh :

$$\boldsymbol{u}_k = -R^{-1} B^T \lambda_{k+1}, \tag{2.24}$$

Kemudian Persamaan (2.24) subtitusikan ke Persamaan (2.21) :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1} B^T \lambda_{k+1}, \tag{2.25}$$

Selanjutnya diasumsikan :

$$\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.26}$$

Berlaku: $\lambda_{k+1} = S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}$

Gunakan Persamaan (2.26) ke dalam (2.25) untuk mendapatkan persamaan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1} B^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.27}$$

Pemecahan untuk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ menghasilkan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I + BR^{-1} B^T S_{k+1})^{-1} A\boldsymbol{x}_k, \tag{2.28}$$

Substitusikan Persamaan (2.26) dengan Persamaan c*ostate* (2.22) :

$$S_k \boldsymbol{x}_k = Q\boldsymbol{x}_k + A^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.29}$$

Substitusikan Persamaan (2.28) dengan Persamaan (2.29) :

$$S_k = A^T S_{k+1}(I + BR^{-1}B^T S_{k+1})^{-1} A + Q, \qquad (2.30)$$

Gunakan inversi matrik :

$$S_k = A^T [S_{k+1} - S_{k+1}B(B^T S_{k+1} B_k + R)^{-1} B^T S_{k+1}] A + Q, \qquad (2.31)$$

Kemudian Persamaan (2.31) dapat dibentuk :

$$S_k = A^T (S_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T)^{-1} A + Q, \qquad (2.32)$$

Persamaan (2.32) merupakan Persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi S_k kemudian dari Persamaan (2.22) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut :

$$\lambda_{k+1} = (A^T)^{-1}(\lambda_k - Q\boldsymbol{x}_k), \qquad (2.33)$$

Berdasarkan Persamaan (2.26) maka Persamaan (2.33) menjadi :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= (A^T)^{-1}(S_k \boldsymbol{x}_k - Q\boldsymbol{x}_k) \\ &= (A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.34) ke Persamaan (2.24) menjadi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_k &= -R^{-1}B^T \lambda_{k+1} \\ &= -R^{-1}B^T (A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Persamaan (2.35) dapat disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k \boldsymbol{x}_{k,}$$

dimana :

$$K_k = -R^{-1}B^T (A^T)^{-1}(S_k - Q).$$

2.11 Keterkendalian Sistem Kendali Waktu Diskrit

Sistem kendali waktu diskrit yang didefinisikan oleh:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k \qquad (2.36)$$

Dengan :

$\boldsymbol{x}$: waktu yang merupakan bilangan, $t \geq 0$

$\boldsymbol{x}_k$: vektor keadaan, $A\boldsymbol{x}_k \epsilon R^n$

$\boldsymbol{u}_k$: vektor kendali, $\boldsymbol{u}_k \epsilon R^m$

A : Matriks anggota (non singgular) $R_{n\times n}$

B : Matriks anggota (non singgular) $R_{n\times m}$

Sistem Persamaan (2.36) dikatakan terkendali jika memenuhi definisi berikut:

Definisi 2.13 (Olsder, 1994) Sistem persamaan $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k$ dikatakan terkendali jika $\boldsymbol{u}_k$ konstan, pada $\boldsymbol{x}_k$ untuk setiap dua titik x_0 dan $x_1 \in \mathbb{R}^n$ dimana $t_1 > 0$ dan $u \in \underline{U}$ berada pada $x\ (t_1, x_0\ , u) = x_1$.

Selain definisi diatas, keterkendalian dapat dilihat berdasarkan lema berikut.

Lema 2.1 (Ogata katsuhiko, 1995) Syarat perlu dan syarat cukup untuk keadaan keterkendalian adalah

$$rank[B|AB|A^2B|\cdots|A^{t-1}B] = n \qquad (2.37)$$

Selain dengan cara yang diuraikan sebelumnya, ada cara lain untuk menentukan apakah suatu sistem terkendali atau tidak. Yaitu dengan mengubah matriks ke bentuk diagonal atau Jordan.

Syarat untuk keadaan keterkontrolan adalah bahwa jika matriks $S^{-1}AS$ merupakan matriks diagonal, maka sistem dalam keadaan terkontrol jika dan hanya jika tidak ada vektor baris nol $S^{-1}B$.

Dari Persamaan (2.36). jika vektor eigen A berbeda, maka sebuah matriks transformasi S dapat menstranformasikan A ke bentuk matriks diagonal, sedemikian sehingga

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

Dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ adalah n nilai eigen yang berbeda dari A. Jika matriks A tidak mempunyai n vektor eigen yang berbeda. Maka pendiagonalan tidak mungkin dilakukan. Dalam kasus ini kita dapat mengubah A menjadi bentuk kanonik Jordan.

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Sistem dikatakan dalam keadaan terkendali jika:

1. Tidak ada dua blok Jordan dalam J yang bersesuaian dengan nilai eigen yang sama.
2. Elemen dari vektor baris $S^{-1}B$ yang bersesuaian dengan baris terakhir dari masing-masing blok Jordan tidak sama dengan nol.
3. Elemen dari masing-masing baris $S^{-1}B$ yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda tidak semuanya nol.