BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi Peluang

Dalam statistik dikenal dua macam distribusi peluang yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu. Pada dasarnya distribusi peluang yang menggunakan variabel acak diskrit, jika dapat diasumsikan secara terbatas dan dapat dihitung dengan jumlah yang jelas, sedangkan untuk distribusi peluang yang menggunakan vairabel acak kontinu tidak dapat dihitung atau tak hingga.

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Himpunan pasangan terurut $x, f(x)$ peluang peubah acak diskrit x bila untuk setiap kemungkinan hasil:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$ (2.1)
3. $P(X) = x = f(x)$

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $x, f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu , yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan rill $\mathbb{R}$, bila :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\propto}^{\propto} f(x) dx = 1$ (2.2)
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

2.2 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satuukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak (X) atau rataan distribusi peluang (X) dan ditulis sebagai(μ_x) atau (μ). Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak(X) dan dinyatakan dengan $E(X)$ (Walpole &Myers, 1989).

Definisi 2.3 (Dennis dkk, 2002) Diberikan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan X adalah :

$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$, bila X diskrit (2.3)

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)$, bila X kontinu (2.4)

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapansetiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang padanannya $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acakkontinu, definisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitudengan mengganti penjumlahan dengan integral (Walpole & Myers, 1989).

2.3 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(X) = (X - \mu)$, karena pentingnya dalam statistika makadiberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang$X$ dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau σ_X^2atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz & Misra, 1988).

Definisi 2.4 (Dudewicz & Misra, 1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah :

$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$, bila diskrit (2.5)

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} X - \mu^2 f(x)\, dx$, bila X kontinu (2.6)

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra, 1988) Variansi dari peubah acak X adalah :

$$Var\ (X) = E(X)^2 - [E(X)]^2 \tag{2.7}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E([X-\mu)]^2 \\ &= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)] \\ &= E(X^2) - E(2\mu X) + E\mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \end{aligned}$$

karena $\mu = E(X)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + [E(X)]^2 \\ &= E(X)^2 - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Definisi 2.5 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x(x) = p(X) \leq x$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \tag{2.8}$$

Fungsi probabilitas kumulatif dihitung dengan cara penjumlahan maka pada variabel acak kontinu, probabilitas kumulatif dicari dengan integral.

Definisi 2.6 (Walpole & Myers, 1989) Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluang dari X adalah:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}\beta}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}, \qquad 0 \leq x < \infty \tag{2.9}$$

Dengan :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{2.10}$$

2.4 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(v) = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}} \qquad (2.11)$$

dengan nilai espektasi dan variansi secara berurutan adalah

$$c\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) \text{dan}\, c\sqrt{\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)-\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)} \qquad (2.12)$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah :

$$F(v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}} \qquad (2.13)$$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 1$ untuk distribusi Weibull dua parameter sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = \int_{0}^{\infty} \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^{k}} dv$$

misal :

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^{k}$$

$$\frac{du}{dv} = k\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}\frac{1}{c}$$

$$du = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

Maka diperoleh:

$$= \int_0^\infty \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} du$$

$$= -e^{-u} \,\Big|_0^\infty$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi weibull pada Persamaan (2.13) berdasarkan Defenisi (2.8) Persamaan (2.10), sebagai berikut:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{v} f(v)dv$$

$$F(v) = \int_0^v \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

Misal:

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^k$$

$$\frac{du}{dv} = k\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}\frac{1}{c}$$

$$du = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}}\, du$$

Maka diperoleh:

$$= \int_0^v \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-u}\, \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}}\, du$$

$$= \int_0^v e^{-u}\, du$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^v$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)} \Big|_0^v$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} - \left(-e^{-\left(\frac{0}{c}\right)^k}\right)$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi weibull dua parameter. Rata-rata atau $E(v)$ dari distribusi Weibull adalah:

$$E(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v)\, dv$$

$$= \int_0^{\infty} v \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k}\, dv$$

$$= \int_0^{\infty} v \frac{k}{c}(v)^{k-1}\left(\frac{1}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k}\, dv$$

$$= \int_0^{\infty} v.v^{-1}.v^k k \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)^k e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k}\, dv$$

$$= \int_0^\infty k\left(\frac{v}{c}\right)^k e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

Misal:

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^k \text{ maka } \left(\frac{v}{c}\right) = u^k \text{ dan } v = c(u)^k$$

$$\frac{du}{dv} = k\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \frac{1}{c}$$

$$du = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

Maka diperoleh,

$$E(v) = \int_0^\infty k\left(\frac{v}{c}\right)^k e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

$$= \int_0^\infty k\left(\frac{v}{c}\right)^k e^{-(u)} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= c\int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{\left(\frac{v}{c}\right)^{-1}} du$$

$$= c\int_0^\infty \left(\frac{v}{c}\right) e^{-u} du$$

$$= c\int_0^\infty (u)^{\frac{1}{k}} e^{-u} du$$

$$= c\int_0^\infty (u)^{1+\frac{1}{k}} e^{-u} du \text{ (merupakan fungsi gamma dengan } \Gamma = 1 + \frac{1}{k}\text{)}$$

Sehingga,

$$E(v) = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Weibull, yaitu sebagai berikut:

$$V(v) = E(v)^2 - [E(v)]^2$$

Terlebih dahulu akan ditentukan:

$$E(v)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v) dv$$

$$= \int_0^{\infty} v^2 \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v^2 k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv$$

Misal :

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^k$$

$$\frac{du}{dv} = k\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \frac{1}{c}$$

$$du = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$E(v)^2 = \int_0^{\infty} \frac{v^2 k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v^2 k}{c}(v)^{k-1}\left(\frac{1}{c}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v^2 k}{c}(v)^k (v)^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)^k \left(\frac{1}{c}\right)^{-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= \int_0^\infty vk\left(\frac{v}{c}\right)^k e^{-u} \frac{1}{\frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1}} du$$

$$= \int_0^\infty c^2 v^2 e^{-u} du$$

$$= c^2 \int_0^\infty v^2 e^{-u} du \text{ (merupakan fungsi gamma dengan } \Gamma = 1 + \frac{2}{k}\text{)}$$

Sehingga,

$$E(v)^2 = c^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

Setelah mendapat $E(v)^2$ maka akan ditunjukkan $Var(v)$ distribusi Weibull dua parameter. Variasi atau $Var(v)$ dari distribusi Weibull adalah:

$$Var(v) = E(v)^2 - [E(v)]^2$$

$$= c^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left[c\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^2$$

$$= c^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left[c^2 \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= c^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= c\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

2.5 Distribusi Rayleigh

Distribusi Rayleigh sering digunakan dalam bidang fisika yang berhubungan dengan pemodelan proses seperti radiasi suara dan cahaya tinggi gelombang dan kecepatan angin. Selain distribusi Weibull, distrusi Rayleigh juga merupakan distribusi yang dianggap sesuai untuk menggambarkan distribusi kecepatan angin. Distribusi ini dipakai jika disuatu wilayah distribusi Weibull dinilai kurang akurat diterapkan. Dengan memberi nilai k=2 pada Persamaan (2.11) maka fungsi kerapatan probabilitas akan menjadi berbentuk:

$$f(v) = \left(\frac{2v}{c^2}\right) e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{2.14}$$

Dengan nilai ekspektasi dan variansi secara berurutan adalah :

$$c\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \text{ dan } c\sqrt{\Gamma^2(2) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \tag{2.15}$$

Sedangkan kumulatifnya adalah:

$$F(v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{2.16}$$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 1$ untuk distribusi Rayleigh dua parameter sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2v}{c^2}\right) e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} dv$$

Misal:

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{v}{c}\right)\frac{1}{c}$$

$$du = \frac{2v}{c^2} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{2v}{c^2}} du$$

Maka diperoleh:

$$f(v) = \int_0^\infty \left(\frac{2v}{c^2}\right) e^{-u} \frac{1}{\frac{2v}{c^2}} du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} du$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^\infty$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Big|_0^\infty$$

$$= -e^{-\left(\frac{\infty}{c}\right)^2} - \left[-e^{-\left(\frac{0}{c}\right)^2}\right]$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Rayleigh pada Persamaan (2.16) berdasarkan (2.8) dan (2.10)

$$F(v) = \int_{-\infty}^{v} f(v) dv$$

$$F(v) = \int_0^v \frac{2v}{c^2} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} dv$$

Misal:

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{v}{c}\right)\frac{1}{c}$$

$$du = \frac{2v}{c^2} dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{2v}{c^2}} du$$

Sehingga,

$$F(v) = \int_0^v \frac{2v}{c^2} e^{-u} \frac{1}{\frac{2v}{c^2}} du$$

$$= \int_0^v e^{-u} du$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^v$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Big|_0^v$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \left(-e^{-\left(\frac{0}{c}\right)^2} \right)$$

$$= -e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - (-1)$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Rayleigh dua parameter. Rata-rata atau $E(v)$ dari distribusi Rayleigh adalah:

$$E(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv$$

$$= \int_0^{\infty} v \left(\frac{2v}{c^2} \right) e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2} dv$$

Misal:

$$u = \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

$$\frac{v}{c} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$v = c(u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{v}{c} \right) \frac{1}{c}$$

$$du = \frac{2v}{c^2}\,dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{2v}{c^2}}\,du$$

Maka,

$$E(v) = \int_0^\infty v\left(\frac{2v}{c^2}\right)e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,dv$$

$$= \int_0^\infty c(u)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2v}{c^2}\right)e^{-u}\,\frac{1}{\frac{2v}{c^2}}\,du$$

$$= \int_0^\infty c(u)^{\frac{1}{2}}\,e^{-u}\,du$$

$$= c\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}e^{-u}\,du$$

$$= c\int_0^\infty u^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}e^{-u}\,du$$ (merupakan fungsi gamma dengan $\Gamma = \frac{3}{2}$)

Sehingga,

$$E(v) = c\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Rayleigh, yaitu sebagai berikut:

$$Var(v) = E(v)^2 - [E(v)]^2$$

Terlebih dahulu ditentukan:

$$E(v)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v)\,dv$$

$$= \int_0^\infty v^2\left(\frac{2v}{c^2}\right)e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,dv$$

$$u = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\frac{v}{c} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$v = c(u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dv} = 2\left(\frac{v}{c}\right)\frac{1}{c}$$

$$du = \frac{2v}{c^2}\,dv$$

$$dv = \frac{1}{\frac{2v}{c^2}}\,du$$

Maka diperoleh,

$$E(v)^2 = \int_0^\infty v^2\left(\frac{2v}{c^2}\right)e^{-u}\,\frac{1}{\frac{2v}{c^2}}\,du$$

$$= \int_0^\infty v^2 e^{-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty \left(c(u)^{\frac{1}{2}}\right)^2 e^{-u}\,du$$

$$= \int_0^\infty c^2 u e^{-u}\,du$$

$$= c^2\int_0^\infty u e^{-u}\,du \quad \text{(merupakan fingsi gamma dengan } \Gamma = 2$$

Sehingga,

$$E(v)^2 = c^2\Gamma(2)$$

Setelah mendapat $E(v)^2$ maka akan ditunjukkan $Var(v)$ distribusi Rayleigh dua parameter. Variasi atau $Var(v)$ dari distribusi Rayleigh adalah:

$$Var(v) = E(v)^2 - [E(v)]^2$$

$$= c^2\Gamma(2) - \left[c\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2$$

$$= c^2\Gamma(2) - \left[c^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= c^2\left[\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= c\sqrt{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}$$

2.6 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthy, 2006).

2.6.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama dari variabel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \dots x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\boldsymbol{\theta}; X)$ maka:

$$L(\boldsymbol{\theta}; X) = f(X; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.17}$$

Karena $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})$ adalah FKP dari variabel acak yang saling bebas, sehingga:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = f(x_1; \boldsymbol{\theta}), f(x_2; \boldsymbol{\theta}), \dots, f(x_n; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.18}$$

Selanjutnya Persamaan (2.17) disubtitusikan ke Persamaan (2.18) maka diperoleh sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\theta}; X) = f(x_1; \boldsymbol{\theta}) f(x_2; \boldsymbol{\theta}) \dots f(x_n; \boldsymbol{\theta})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(xi; \boldsymbol{\theta}) \tag{2.19}$$

Contoh 2.1 Misalkan X memiliki FKP sebagai berikut:

$$f(x;\theta) = \theta X^{\theta-1}, \qquad 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$$

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari distribusi tersebut, tentukanlah fungsi *likelihood* dari θ.

Penyelesaian:

Untuk menetukan fungsi likelihood digunakan Persamaan (2.19) sehingga diperoleh fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(\theta; X) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta)$$
$$= \theta X_1^{\theta-1} \theta X_2^{\theta-1} \cdots \theta X_n^{\theta-1}$$
$$= \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}$$

2.6.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi Maksimum *Likelihood* (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\boldsymbol{\theta}$ sebagai estimator titik untuk $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta}; X)$ Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f(x;\boldsymbol{\theta})$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1 x_2, , \dots, x_n$ setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari $\boldsymbol{\theta}$ yaitu $L(\boldsymbol{\theta}; X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}; X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $lnL(\theta; X) = l(\boldsymbol{\theta}; X)$, dimana $l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}; X) \geq l(\boldsymbol{\theta}; X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta; X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi likelihood terhadap parameternya, yaitu $\frac{dt(\theta; x)}{d\theta} = 0$ (Lee & Wang, 2003).

Contoh 2.2 Dari contoh (2.1) diketahui fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\theta; X) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}$$

Dari fungsi tersebut, tentukanlah estimator dari $\hat{\theta}$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan estimator dari $\hat{\theta}$, maka kita harus menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood* atau $lnL(\theta; X) = l(\theta; X)$, yaitu:

$$\begin{aligned}
l(\theta; X) &= \ln \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \\
&= \ln \theta^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}\right) \\
&= \ln \theta^n + \ln X_1^{\theta-1} + \ln X_2^{\theta-1} + \cdots + \ln X_n^{\theta-1} \\
&= n \ln \theta + \theta - 1 \ln X_1 + \theta - 1 \ln X_2 + \cdots + \theta - 1 \ln X_n \\
&= n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \\
&= n \ln \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i
\end{aligned}$$

Karena, $\dfrac{dt(\theta; x)}{d\theta} = 0$

Sehingga, $\dfrac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$

$$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

$$\theta = \frac{-n}{-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

maka estimasi maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta} = \theta$, dimana $\theta = \dfrac{-n}{-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

2.6.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Metode Newton-Raphson adalah proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan tidak linier. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang dilakukan secara berulang-ulang, dimana setiap pengulangan disebut iterasi.

Pada umumnya para ahli statistik sering menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameter dari suatu persamaan. Jika hampiran menghasilkan suatu nilai pemecahan yang sangat dekat dengan pemecahan persamaan yang tidak linier maka iterasi mengalami proses konvegen (John Wenyu Wang,2001).

Asumsikan untuk kesederhanaan yang hanya melibatkan satu dimensi dan $\bar{\theta}$ adalah maksimum $l(\theta)$. Dengan demikian pemecahan permasalahan sehubungan dengan θ adalah:

$$\theta = \bar{\theta} - \frac{l'(\bar{\theta})}{l''(\bar{\theta})} \qquad (2.20)$$

Hal ini memberikan suatu prosedur untuk mengoptimalkan $l(\theta)$. Untuk iteratifnya adalah:

$$\theta^{(s+1)} = \bar{\theta} - \frac{l'(\theta^{(s)})}{l''(\theta^{(s)})} \qquad (2.21)$$

$\theta^{(s+1)} = \bar{\theta}$ adalah setara dengan $l(\theta) = 0$. Dimana $l(\theta)$ adalah fungsi *log-likelihood*, algoritma ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\theta^{(s+1)} = \bar{\theta} - \frac{s(\theta^{(s)})}{J(\theta^{(s)})} \qquad (2.22)$$

Argumen untuk menurunkan algoritma Newton-Raphson untuk optimasi dalam satu dimensi dapat langsung diperpanjang untuk masalah multi-dimensi memberikan multi-parameter metode Newton-Raphson:

$$\boldsymbol{\theta}^{(s+1)} = \bar{\boldsymbol{\theta}} - \left[l''(\boldsymbol{\theta}^{(s)})\right]^{-1} l'(\boldsymbol{\theta}^{(s)}) \qquad (2.23)$$

Dimana $l'(\boldsymbol{\theta})$ sekarang adalah vektor yang terdiri dari turunan parsial, sementara $l''(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks dengan (i, j) sama dengan turunan kedua θ_i dan θ_j .$l''(\boldsymbol{\theta})$ biasanya dilambangkan sebagai matriks Hessian. Algoritma dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\theta}^{(s+1)} = \bar{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(s)}) s(\boldsymbol{\theta}^{(s)}) \qquad (2.24)$$

untuk optimasi *likelihood*, di mana $s(\boldsymbol{\theta})$ adalah fungsi skor sementara $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ adalah informasi yang diamati matriks. Metode Newton-Raphson untuk mencari pemecahan dari $x_1, x_2, \dots, x_p$

sehingga :

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_p(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$$

Kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk kedalam sebuah matriks yang disebut matriks jacobian, yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Kemudian dicari invers dari Persamaan (2.25) yaitu:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

selanjutnya misalkan $x_1^k, x_2^k, ..., x_p^k$ adalah nilai nilai hampiran pada iterasi ke k, dan misalkan $f_1^k, f_2^k, ..., f_p^k$ adalah nilai-nilai yan berhubungan dengan fungsi $f_1, f_2, ..., f_p,$ yaitu:

$$f_1^k = f_1(x_1^k, x_2^k, ..., x_p^k)$$
$$f_2^k = f_2(x_1^k, x_2^k, ..., x_p^k)$$
$$\vdots$$

$$f_p^k = f_p\left(x_1^k, x_2^k, ..., x_p^k\right)$$

dan misalkan b_{ij}^k adalah elemen dari J^{-1} yang dihasilkan pada $x_1^k, x_2^k, ..., x_p^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_1^k - b_{11}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \cdots + b_{1p}^k f_p^k \\ x_2^{k+1} &= x_2^k - b_{21}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \cdots + b_{2p}^k f_p^k \qquad (2.27) \\ &\vdots \\ x_p^{k+1} &= x_p^k - b_{p1}^k f_1^k + b_{p2}^k f_2^k + \cdots + b_{pp}^k f_p^k \end{aligned}$$

Proses iterasi dapat dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Nilai awal dapat dicari salahsatunya dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linier sederhana. Selanjutnya, proses iterasi dapat dihentikan jika iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (John Wenyu Wang, 2001).

2.7 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Uji kebaikan dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai berdasarkan data yang ada. Pada penelitian ini akan digunakan uji kebaikan, yaitu uji*Akaike's Information Criterion* (AIC), dengan terlebih dahulu menentukan log *likelihood*, sehingga nilai AIC dapat ditentukan dengan menggunakan rumus yaitu:

$$AIC = -2l + 2p \qquad (2.28)$$

dengan,

p = Jumlah parameter