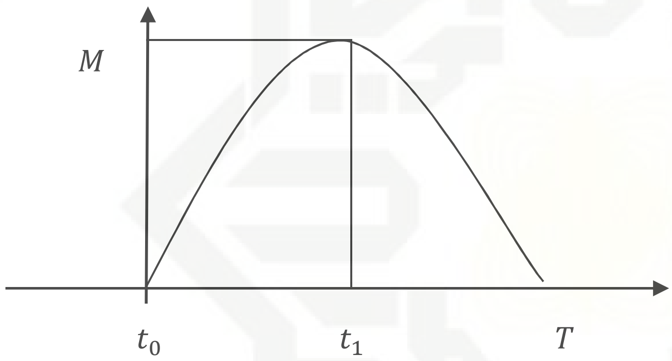
BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Model Persediaan untuk Kasus Penurunan Barang

Pembentukan model ini didasarkan pada sistem persediaan dimana ditinjau persediaan saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Diasumsikan bahwa fase pertama dari 0 hingga t_1 untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1 hingga T untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan.



Gambar 2.1 Persediaan Menurun

Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus penurunan barang. Oleh karna itu kurva pada Gambar 2.1 yang ditunjukkan untuk selang waktu $[t_1, T]$. Selanjutnya berdasarkan Athans & Falb dalam bukunya yang berjudul *optimal control an introduction to the theory and its applications* maka didefinisikan Persamaan differensial dinamik untuk kasus penurunan barang yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_1, \infty) \tag{2.1}$$

dengan $v = m - \theta$, $P(t) \geq 0$. Kemudiaan untuk menjamin tingkat persediaan menurun dari t_1 hingga ∞, maka lebih lanjut Persamaan (2.1) memenuhi.

$$D(t) - P(t) + v(t)I(t) > 0 \quad t \in [t_1, \infty) \tag{2.2}$$

dengan:

$I(t)$: tingkat fungsi persediaan.

$P(t)$: produksi rata-rata fungsi.

$D(t)$: fungsi permintaan.

I_0 : tingkat nilai awal persediaan.

$m(t)$: rata-rata fungsi kenaikan.

$\theta(t)$: rata-rata fungsi kemerosotan.

Fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan yaitu sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt \tag{2.3}$$

dengan:

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan

h : koefisien biaya penyimpanan

k : koefisien biaya produksi

2.2 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini akan dibahas tentang kendali optimal waktu kontinu, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu kontinu. yang dilanjutkan dengan masalah kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga.

2.2.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Diberikan Persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu kontinu sistem dinamis untuk waktu *t* sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{2.4}$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ialah vektor kendali. Dengan fungsi tujuan yaitu meminimalkan Persamaan.

$$J(t_0) = \phi(\boldsymbol{x}(T), T) + \int_{t_0}^{T} \varphi\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) dt, \tag{2.5}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan Persamaan-Persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif sebagai berikut :

Persamaan *Hamilton* : $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t).$ (2.6)

Persamaan *State* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.7)

Persamaan *Costate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial x}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial \varphi(x,\boldsymbol{u},t)}{\partial x}(t),\ t \leq T.$ (2.8)

Persamaan *Stasioner* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \varphi(x,\boldsymbol{u},t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.9)

2.2.2 Kendali Optimal Linier Kuadratik untuk Waktu Kontinu Satu Kendali

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar terbuka linier kuadratik, didefinisikan Persamaan sistem linier untuk waktu t yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.10}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}, \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, dan meminimalkan fungsi tujuan yaitu :

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T)S(T)\boldsymbol{x}(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt, \tag{2.11}$$

dengan t_0 waktu awal dan T_f waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T)$ semi definit positif $(Q \geq 0, S(T) \geq 0)$ selanjutnya Q dan $S(T)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x}^T(T)S(T)\boldsymbol{x}(T)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\boldsymbol{x}(t)$. Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} > 0$ untuk setiap $\boldsymbol{u}(t) \neq 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan Persamaan Aljabar Riccati sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meminimalkan fungsi tujuan.

Berdasarkan Persamaan $(2.6) - (2.9)$ diperoleh Persamaan-Persamaan sebagai berikut :

Persamaan Hamilton : $H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (2.12)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}.$ (2.13)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}.$ (2.14)

Kondisi *stasionary* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}.$ (2.15)

Berdasarkan Persamaan (2.15) diperoleh $\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.16)

Selanjutnya Persamaan (2.16) disubtitusikan ke Persamaan (2.13) maka diperoleh yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}. \tag{2.17}$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\boldsymbol{x}(t_0)$, waktu akhir T diketahui, state akhir $\boldsymbol{x}(T)$ bergantung kepada T sehingga $d\boldsymbol{x}(T)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} \Big|_T = S(T)\boldsymbol{x}(T), \tag{2.18}$$

untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diasumsikan $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.18) untuk setiap interval $[t_0, T]$ sehingga :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \tag{2.19}$$

dengan $S(T)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.19) didapat

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.20}$$

kemudian subtitusikan (2.17) ke Persamaan (2.20) diperoleh :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}). \tag{2.21}$$

dari Persamaan (2.14) didapat

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}.$$

Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (2.20) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh :

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x})$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}, \qquad , \boldsymbol{\lambda} = S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^TS\boldsymbol{x}$$

$$\dot{S} = -A^TS - SA + SBR^{-1}B^TS - Q \tag{2.21}$$

Persamaan (2.21) merupakan Persamaan Aljabar riccati, Selanjutnya untuk $T \rightarrow \infty$ maka Persamaan (2.21) diperoleh:

$$0 = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q. \quad (2.22)$$

Jika Persamaan (2.16) memiliki solusi S, maka di peroleh kendali optimal sebagai berikut :

$$\boldsymbol{u}^* = -R^{-1}B^T S\boldsymbol{x}. \quad (2.23)$$

2.2.3 Kedali Optimal Linear Kuadratik untuk Waktu Kontinu Satu Kendali untuk Kasus Skalar

Diketahui Persamaan (2.10) dan Persamaan (2.11) Persamaan ini di ubah kebentuk skalar dengan mensubsitusikan $A = a,\ B = b,\ Q = q$ dan $R = r\ \in \mathbb{R}$ maka di dapatkan

$$\dot{x} = ax + bu \quad (2.24)$$

dari Persamaan (2.11) maka di dapatkan

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^2q + u^2r)\,dt \quad (2.25)$$

dari Persamaan (2.22) maka di peroleh Persamaan aljabar Riccati

$$\frac{b^2}{r}s^2 - 2as + q = 0 \quad (2.26)$$

Dari Persamaan (2.26) maka terdapat 3 kasus yang berbeda yaitu :

1. Kasus $D = 0$

   Maka, solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.26) sebagai berikut:

   $$S_{1,2} = \frac{ar}{b^2}$$

   sehingga fungsi kendali yang optimal dapat di peroleh:

2. Kasus $D < 0$

   Maka solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.26) tidak memiliki solusi.

3. Kasus $D > 0$

   Maka solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.26) sebagai berikut

   $$S_1 = \frac{2a+\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}} \text{ dan } S_2 = \frac{2a-\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}}$$

   sehingga fungsi kendali yang optimal dapat di peroleh dan berbeda

2.3 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik yaitu :

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{2.27}$$

dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j , $c_{ij} \in \mathbb{R}, x \in R^n$, $A \in R^{nxn}$ maka Persamaan (2.27) dapat diuraikan menjadi :

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j \tag{2.28}$$

Menurut (**Lewis, 1995**) sifat definit dari Persamaan kuadratik (2.27) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran *n* x *n* dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0\ \forall\ i\ , I = 1,2, \dots n$
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0\ \forall i \ni \lambda_j = 0$
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0\ \forall i, I = 1,2, \dots n$
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0\ \forall i \ni \lambda i = 0$

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Ubahlah bentuk kuadratik dari $[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ke notasi sigma dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

$$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 6{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 6{x_2}^2$$
$$= 6x_1x_1 + 6x_2x_1 + 6x_1x_2 + 6x_2x_2$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 6x_ix_j$$

selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut:

dari matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det } (\lambda \text{I} - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 12$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit positif.

Contoh 2.2:

Ubahlah bentuk kuadratik dari $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ke notasi sigma dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -6{x_1}^2 - 12x_1x_2 - 6{x_2}^2$$

$$= 6x_1x_1 - 6x_2x_1 - 6x_1x_2 - 6x_2x_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -6x_ix_j$$

selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut:

dari matriks $A = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Olsder, 1994) diberikan persamaan diferensial orde1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Dari definisi maka di beri contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

Penyelesaian :

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = 0$$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\overline{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk lebih memahami definisi di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut :

Contoh 2.4 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial dinamik $\dot{x} = -x$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dan $x(0) = x_0$

Penyelesaian :

Sebelum dianalisa kestabilan, maka di berisolusi sebagai berikut

$$\dot{x} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt$$

$$\ln x = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga :

$$\ln x - c = -t$$

$$\ln x - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -t$$

$$x = x_0 e^{-t}$$

sehingga $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena solusinya menuju 0.

Contoh 2.5 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\dot{x}_1 = -6x_1 \text{ dan } \dot{x}_2 = -3x_2$$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu :

untuk $\dot{x}_1 = -6x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -6x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -6dt$$

$$\ln x_1 = -6t + c$$

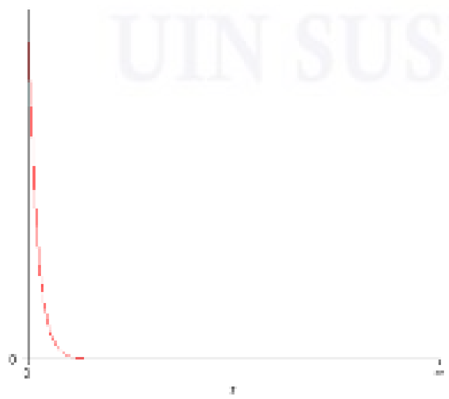
Karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh :

$$\ln x_1 - c = -6t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -6t$$

$$x_1 = x_0 e^{-6t}$$



Gambar 2.2 Grafik fungsi $f(t) = e^{-6t}$

Berdasarkan gambar 2.2 untuk $t \to \infty$ maka $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{x_1}$ stabil karena solusinya menuju 0.

Berikutnya solusi untuk $\dot{x}_2 = -3x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -3dt$$

$$\ln x_2 = -3t + c$$

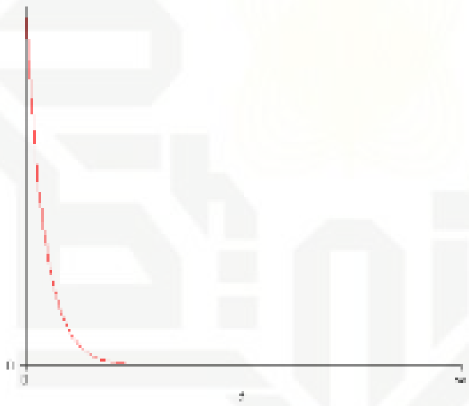
karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh

$$\ln x_2 - c = -3t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -3t$$

$$x_2 = x_0 e^{-3t}$$



Gambar 2.3 Grafik fungsi $\boldsymbol{f(t) = e^{-3t}}$

Berdasarkan gambar 2.3 Jika $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa x_2 stabil karena solusinya menuju 0.

Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil karena kedua solusi menuju 0.