BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (*horizontal*) dan kolom (*vertikal*) yang dimilikinya. Jenis-jenis matriks yang digunakan dalam proposal ini yaitu:

a. Matriks Nilpoten

Definisi 2.2 (Perko, 1991) Sebuah matriks berukuran $n \times n$ dikatakan nilpoten berorde k maka $N^k = 0$.

Contoh 2.1:

Diberikan sebuah matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, buktikan bahwa matriks *M* merupakan matriks nilpoten dan tentukan ordenya.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa *M* adalah matrik nilpoten, maka akan dicari terlebih dahulu martriks *M* dengan orde 2 sebagai berikut:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

didapat M^2 tidak 0 maka matriks *M* dengan orde 2 bukanlah matriks nilpoten. Selanjutnya akan dicari matriks *M* dengan orde 3 sebagai berikut:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

didapat $M^3 = 0$ maka *M* adalah matriks nilpoten berode *3.*

b. Matriks Singular

Definisi 2.3 (Ruminta, 2009) Matriks singular (*singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

Contoh 2.2:

Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .Tentukan apakah matriks A singular atau tidak?

Penyelesaian:

Diketahui Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Bigg|$$

$$det\ (A) = (2 \times 1 \times 0) + (3 \times 5 \times 0) + (2 \times 4 \times 0) - (3 \times 4 \times 0) - (2 \times 5 \times 0) - (2 \times 1 \times 0)$$

$$det\ (A) = 0$$

didapat determinan dari matriks *A* adalah 0 maka matriks *A* adalah matriks singular.

c. Matriks Nonsingular

Definisi 2.4 (Ruminta, 2009) Matriks nonsingular (nonsingular matrix) adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.3:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.Tentukan determinan matriks *A ?*

Penyelesaian:

Diketahui Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$det\ (A) = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{matrix} \Bigg|$$

$$det\ (A) = (1 \times 2 \times 0) + (2 \times 1 \times 3) + \big(3 \times (-4) \times (-2)\big) - \big(2 \times (-4) \times 0 - \big(1 \times 1 \times (-2)\big) - (3 \times 2 \times 3)\big)$$

$$det\ (A) = 46$$

didapat determinan dari matriks A tidak nol, maka matriks A adalah matriks nonsingular

2.2 Bentuk kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yang bersifat definit positif maupun definit negatif. Diawali dari bentuk umum kuadratik yaitu:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i\, x_j \qquad (2.1)$$

dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j dengan $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ maka Persamaan (2.1) dapat diuraikan menjadi :

$$= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2. \qquad (2.2)$$

Sifat definit positif dan definit negatif dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$, secara lengkap diberikan pada teorema berikut, dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A.

Menurut **(Lewis, 1995)** Jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ memenuhi

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0, \forall i, i = 1,2, \dots, n$
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0, \forall i \ni \lambda_i = 0$
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0, \forall i, i = 1,2, \dots, n$
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0, \forall i \ni \lambda_i = 0$

Jika tidak memenuhi ke-4 kriteria diatas maka disebut dengan indefinit. Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.5:

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -2x_i x_j$ ke kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks *A*.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
x^T Ax &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -2x_i x_j \\
&= -2x_1x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2x_2x_2 \\
&= -2{x_1}^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2{x_2}^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$Det\,(\lambda I - A) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$[(\lambda + 2)(\lambda + 2) - 4] = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$$

jadi, dari matriks *A* dapat disimpulkan adalah matriks semi definit negatif.

Contoh 2.6:

Tentukanlah definit dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$Det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$Det\ \left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$Det\ \left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4$$

jadi, dari matriks *A* dapat disimpulkan adalah matriks semi definit positif.

Contoh 2.7:

Tentukanlah definit dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$Det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda(\lambda + 3)\ (\lambda + 1)$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3 dan\ \lambda_3 = -1$$

jadi, dari matriks *A* dapat disimpulkan adalah matriks semi definit negatif.

2.3 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan Persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik equilibirium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut.

Defenisi 2.3 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Contoh 2.9:

Tentukan kestabilan dari Persamaan diferensial $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -dt$$

$$ln\, x_1 = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = ln\, x_0$

sehingga

$$ln\, x_1 - c = -t$$

$$ln\, x_1 - ln\, x_0 = -t$$

$$x_1 = x_1(0).\, e^{-t}$$

untuk $t \to \infty\ maka$

$$x_1(t) = x_1(0).\, e^{-\infty}$$

$$x_1(t) \to 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$ln\, x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$x_2 = x_2(0).e^{-2t}$$

untuk $t \to \infty$ maka

$$x_2(t) = x_2(0).e^{-2t}$$

$$x_2(t) \to 0$$

dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

2.4 Sistem Kendali Optimal

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga.

a. Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga.

b. Masalah umum kendali optimal waktu kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk Persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{2.3}$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali input, dengan fungsi tujuan yaitu meminimalkan dengan Persamaan

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt, \tag{2.4}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan Persamaan-persamaan berikut yang diperlukan,

Persamaan Hamilton : $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t) + \lambda^T(t)f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)$ (2.5)

Persamaan *state* : :$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.6)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial x}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(x(t),\boldsymbol{u}(t),t)}{\partial x}(t), \ t \leq T_f.$ (2.7)

Persamaan *stasioner* : $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(x(t),\boldsymbol{u}(t),t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (2.8)

c. Kendali lingkar tertutup linier kuadratik

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkar tertutup didefinisikan Persamaan sistem linier untuk waktu *t*.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{2.9}$$

dengan $A \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{x}(t)\epsilon \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\boldsymbol{u}(t)\epsilon \mathbb{R}^m$, dan meminimalkan fungsi tujuan yaitu.

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt, \tag{2.10}$$

dengan t_0 waktu awal T_f adalah waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif $(Q \geq 0,\ S(T_f) \geq 0)$ selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x}^T\ (T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap ***x(t)***. Diasumsikan juga *R* adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} > 0$ untuk setiap $\boldsymbol{u}(t) \neq 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan Persamaan aljabar Riccati sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meninimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan (2.9)-(2.10) diperoleh Persamaan-persamaan sebagai berikut.

Persamaan Hamilton : $H(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (2.11)

Persamaan *state* yaitu : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t).$ (2.12)

Persamaan *kostate* yaitu : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = Q\boldsymbol{x}(t) + A^T \boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.13)

Persamaan *stasioner* yaitu : $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u}(t) + B^T\boldsymbol{\lambda}$ (2.14)

Berdasarkan persamaan (2.14) diperoleh $\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.15)

Selanjutnya Persamaan (2.15) disubtitusikan ke Persamaan (2.12) maka diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t). \tag{2.16}$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\boldsymbol{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, *state* akhir $\boldsymbol{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\boldsymbol{x}(t_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{T_f} = S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f). \tag{2.17}$$

Untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diamsumsikan $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.17) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{2.18}$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.18) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.16) diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}). \tag{2.19}$$

Dari Persamaan (2.7) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}.$ Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (2.19) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^TS\boldsymbol{x})$$

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda},\ \text{dimana: } \boldsymbol{\lambda} = S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^TS\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^TS\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = (A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q)\boldsymbol{x}.$$

$$-\dot{S} = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q$$

$$\dot{S} = -A^TS - SA + SBR^{-1}B^TS - Q. \tag{2.20}$$

karena Persamaan (2.20) memenuhi untuk setiap waktu t.

Jika S adalah solusi untuk Persamaan diferensial Riccati (2.20) maka dapat dibentuk fungsi kendali.

$$\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^{T}S(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{2.21}$$

Selanjutnya untuk menganalisa kestabilan Persamaan diferensial dinamik maka disubtitusikan (2.21) ke Persamaan (2.16), diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\big(-R^{-1}B^{T}S(t)\boldsymbol{x}(t)\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - BR^{-1}B^{T}S(t))\boldsymbol{x}(t) \tag{2.22}$$

Persamaan (2.22) mencapai kestabilan jika $\big(A - BR^{-1}B^{T}S(t)\big) < 0$

2.5 Kendali Optimal Waktu Berhingga dengan Sistem Deskriptor

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal waktu berhingga dengan sistem deskriptor untuk kendali lingkar tertutup. Didefinisikan Persamaan dinamik dengan deskriptor sebagai berikut:

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \quad , x(0) = x_0 \tag{2.23}$$

dengan $E,\ A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}$, $Rank(E) = n$, $B \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m}$ adalah fungsi kendali yang diberikan pada Persamaan (2.23).

Fungsi tujuan yaitu:

$$J = \boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{Tf}[\boldsymbol{x}^{t}Qx + \boldsymbol{u}^{T}R\boldsymbol{u}]\,dt \tag{2.24}$$

Persamaan (2.23) dapat dirubah kebentuk umum menjadi Persamaan kendali lingkar tertutup linier kuadratik dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 2.5 (Gantmacher, 1959) Jika Persamaan deskriptor (2.23) berbentuk umum maka terdapat dua matrik nonsingular X dan Y sedemikian sehingga $Y^{T}EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ dan $Y^{T}AX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$ dengan A_1 adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai eigen dari A, I_n dan I_k adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.

berdasarkan teorema (2.5) di atas, maka terlebih dahulu didefinisikan

$$x = X_1x_1 + X_2x_2 \tag{2.25}$$

dengan $X = [X_1 X_2]$, $Y = [Y_1^T Y_2^T]$, selanjutnya Persamaan (2.23) menjadi seperti berikut:

$$Y^T E\dot{\boldsymbol{x}} = Y^T A\boldsymbol{x} + Y^T B\boldsymbol{u} \tag{2.26}$$

berdasarkan Persamaan (2.25) maka Persamaan (2.26) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u} \tag{2.27}$$

Selanjutnya berdasarkan jurnal Muhammad Wakhid Musthofa (2014) diketahui bahwa indeks dari sistem deskriptor (2.23) dinyatakan dengan derajat kenilpotenan k dari matriks *N*. Berdasarkan jurnal tersebut diketahui bahwa sistem berindeks satu maka Persamaan (2.27) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u} \tag{2.28}$$

selanjutnya berdasarkan Persamaan (2.24) diperoleh $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq X^{-1}\boldsymbol{x}$ sehingga,

$$\begin{bmatrix} x_1(\mathrm{t}) \\ x_2(\mathrm{t}) \end{bmatrix} = X^{-1}x(t) \tag{2.29}$$

berdasarkan Persamaan (2.28) dan (2.29) maka dapat disusun Persamaan dinamik yaitu:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u} \quad , \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0 \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + Y_1 B\boldsymbol{u} \ , x_1(0) \tag{2.31}$$

$$x_2 = -Y_2 B\boldsymbol{u} \tag{2.32}$$

berdasarkan Persamaan (2.26) dan Persamaan (2.30) fungsi tujuan (2.24) dapat ditulis sebagai berikut:

$$J = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[[x_1^T x_2^T] X^T Q X \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} \right] dt$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[[x_1^T(-Y_2 B\boldsymbol{u})^T] \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} Q[X_1 X_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ -Y_2 B\boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} \right] dt$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[[x_1^T \boldsymbol{u}^T] \begin{bmatrix} X_1^T Q X_1 & -X_1^T Q X_2 Y_2 B \\ -X_2^T Y_2^T B^T Q X_1 & X_2^T Y_2^T B^T Q X_2 Y_2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[[x_1^T \boldsymbol{u}^T] \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt \tag{2.33}$$

Berdasarkan Persamaan (2.31) dan Persamaan (2.33) maka dibentuk fungsi Hamilton yaitu:

$$H = [x_1^T \boldsymbol{u}^T] \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \omega_1^T (A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u})$$

$$H = [x_1^T Q x_1 + \boldsymbol{u}^T V^T x_1 + x_1^T V \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}] + \omega_1^T (A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u}) \tag{2.34}$$

dari Persamaan (2.34) maka diperoleh:

Persamaan *state* yaitu : $\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \omega} = A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u}$ (2.35)

Persamaan *kostate* yaitu : $\dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(2Q x_1 + 2V \boldsymbol{u} + A_1^T \omega)$ (2.36)

Persamaan *stasioner* yaitu : $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2 V^T x_1 + 2R \boldsymbol{u} + B^T Y_1^T \omega$ (2.37)

berdasarkan Persamaan (2.37) diperoleh

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1} V^T x_1 - {}^1\!/_2 \, B^T Y_1^T \omega \tag{2.38}$$

Selanjutnya fungsi kendali (2.38) disubstitusikan ke Persamaan dinamik (2.31).

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u},\ x_1(0)$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + Y_1 B \left(-R^{-1} V^T x_1 - {}^1\!/_2 \, B^T Y_1^T \omega\right)$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + Y_1 B - R^{-1} V^T x_1 - {}^1\!/_2 \, B^T Y_1^T \omega \tag{2.39}$$

2.6 Bentuk Diskon

Pada bagian ini akan diberikan bentuk Persamaan sistem dinamik dengan pemberian faktor diskon. Diketahui dari Persamaan (2.3) diberikan faktor diskon pada fungsi dinamik dengan satu kendali adalah sebagai berikut :

$$e^{-\theta t}\dot{\boldsymbol{x}} = Ae^{-\theta t}\boldsymbol{x} + Be^{-\theta t}\boldsymbol{u} \tag{2.40}$$

didefinisikan $\widetilde{\boldsymbol{x}} = e^{-\theta t}\boldsymbol{x}$ *dan* $\widetilde{\boldsymbol{u}} = e^{-\theta t}\boldsymbol{u}$ maka dari $\widetilde{\boldsymbol{x}} = e^{-\theta t}\boldsymbol{x}$ diperoleh :

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}} = -\theta e^{-\theta t}\boldsymbol{x} + e^{-\theta t}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.41}$$

subtitusikan Persamaan (2.40) ke Persamaan (2.41) maka akan diperoleh :

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}} = Ae^{-\theta t}\boldsymbol{x} - \theta e^{-\theta t}\boldsymbol{x} + Be^{-\theta t}\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}} = (A - \theta I)\widetilde{\boldsymbol{x}} + B\widetilde{\boldsymbol{u}} \tag{2.42}$$

maka diperoleh fungsi dinamik dengan faktor diskon (2.42) dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n}$, dan fungsi kendali $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^{n}$. Selanjutnya fungsi tujuan setelah pemberian faktor diskon diperoleh sebagai berikut ;

$$J_i(\boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{T_f} e^{-\theta t}[\boldsymbol{x}^T\ \boldsymbol{u}^T]\, Q_i \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix} dt \tag{2.43}$$

selanjutnya fungsi tujuannya menjadi sebagai berikut :

$$J_i(\boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{T_f} [\widetilde{\boldsymbol{x}}^T\ \widetilde{\boldsymbol{u}}^T]\, Q_i \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{x}}\\ \widetilde{\boldsymbol{u}}\end{bmatrix} dt \tag{2.44}$$