BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi Peluang

Dalam statistik dikenal dua macam distribusi peluang yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu. Pada dasarnya distribusi peluang yang menggunakan variabel acak diskrit, jika dapat diasumsikan secara terbatas dan dapat dihitung dengan jumlah yang jelas, sedangkan untuk distribusi peluang yang menggunakan variabel acak kontinu tidak dapat dihitung atau tak hingga.

2.2.1 Distribusi Peluang Diskrit

Peubah acak yang nilainya berupa bilangan cacah, dapat dihitung dan tidak terhingga disebut peubah acak diskrit. Distribusi peluang yang berhubungan dengan peubah acak diskrit disebut distribusi peluang diskrit.

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak diskrit X, yang biasanya disebut fungsi densitas,yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\sum_x f\ x = 1$
3. $P\ X = x = f\ x$ (2.1)

2.2.2 Distribusi Peluang Kontinu

Fungsi $f\ x$ adalah fungsi kepadatan peluang dengan peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan riil R, bila $f\ x$ yang diintegralkan yang memenuhi kondisi :

1. $f(x) \geq 0$, untuk $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f\ x\ dx = 1$ (2.2)
3. $P\ a\ < X > b = \int_a^b f\ x\ dx$

2.2 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemutusan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_x atau μ. Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak *X* dan dinyatakan dengan *E(X)* (Walpole & Myres, 1989).

Definisi 2.2 (Dennis dkk, 2002) Diberikan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan *X* adalah:

$\mu = E\ X = \sum_x xf(x)$, Bila *X* diskrit (2.3)

$\mu = E\ X = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f\ dx$, Bila *X* kontinu (2.4)

Metode yang diuraikan diatas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai x_1, $x_2, \ldots, x_n$ dari peubah acak *X* dengan peluang padanannya $f\ x_1, f\ x_2, \ldots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acak kontinu, definisi nilai harapan metematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (Walpole & Myres, 1989).

2.3 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan menggambil $g\ (X) = (X - \mu)^2$, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau σ_x^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang *X* (Dudewicz & Misra,1988).

Definisi 2.3 (Dudewicz & Misra, 1988) Diberikan *X* adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi *X* adalah:

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x X - \mu^2 f(x)$, bila X diskrit (2.5)

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = {}_{-\infty}^{\infty} X - \mu^2 f\ x\ dx$, bila X kontinu (2.6)

Teorema 2.1 (Dudewicz &Misra, 1988) Variansi dari peubah acak X adalah:

$$Var\ X = E\ X^2 - [E(X)]^2 \quad (2.7)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var\ X &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)] \\ &= E\ X^2 - E\ 2\mu X + E\mu^2 \\ &= E\ X^2 - 2\mu E\ X + E\ \mu^2 \end{aligned}$$

Karena $\mu = E(X)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\ X^2 - 2E\ X\ E\ X + [E\ X]^2 \\ &= E\ X^2 - 2E\ X^2 + [E\ X]^2 \\ &= E\ X^2 - [E(X)^2] \end{aligned}$$

2.4 Fungsi Kumulatif

Jika *F (x)* adalah fungsi distribusi kumulatif dari variable acak kontinu, maka fungsi densitas peluang *f(x)* dari X adalah turunan dari *F(x)*.

Definisi (Walpole & Myres, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x x = p\ X\ \le x$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka:

$$F_x x = \int_{-\infty}^{\infty} f\ t\ dt \quad (2.8)$$

2.5 Distribusi Gamma

Definisi 2.5 (Harinaldi, M.Eg, 2005) Suatu variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter bentuk α dan parameter skala β dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi densitas dari X adalah:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta^{\alpha})\,\Gamma^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-\frac{X}{\beta}};\ X \ge 0 \\ 0,\ \ selainnya \end{cases} \quad (2.9)$$

dimana:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx\,;\ \alpha > 0 \tag{2.10}$$

Kuantitas $\Gamma(\alpha)$ dikenal dengan fungsi gamma. Integral secara langsung akan menghasilkan bahwa $\Gamma(1)=1$. Dan secara terus-menerus akan menghasilkan bahwa $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)$ untuk $\alpha > 1$, dan juga $\Gamma(n)=(n-1)!$ yang dihasilkan jika n adalah bilangan bulat. Hal diatas dapat di tunjukkan seperti berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-x^{\alpha-1}e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi densitas peluang distribusi gamma akan ditunjukkan memenuhi sifat distribusi peluang kontinu, seperti berikut:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}dx$$

misalkan:

$$y = \frac{x}{\beta}$$

$$dy = \frac{1}{\beta}dx$$

$$x = y\beta$$

$$dx = \beta dy$$

maka:

$$\int_{-\infty}^\infty x dx = \int_0^\infty \frac{y\beta^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}\beta dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}\beta e^{-y}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}e^{-y}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma\alpha} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma\alpha}\Gamma\alpha$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Gamma dua parameter sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}\right]dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\beta^\alpha \beta\alpha\Gamma\alpha}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}$$

$$= \alpha\beta$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Gamma dengan menggunakan persamaan (2.7), yaitu:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^\infty x^2 \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} \beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)$$

$$= \frac{\beta^\alpha \beta^2 (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha \Gamma\alpha}$$

$$= \frac{\beta^2 (\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\alpha}$$

$$= \alpha\beta^2(\alpha+1)$$

Sehingga variansi distribusi gamma dapat ditentukan sebagai berikut:

$$V(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \alpha\beta^2(\alpha+1) - \alpha\beta^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

2.5 Distribusi Wiebull

Distribusi Weibull adalah distribusi yang dikembangkan dari distribusi eksponensial. Nama distribusi ini berasal dari nama ahli fisika yang berasal dari Sweden yaitu W.Weibull. Distribusi ini merpakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data. Distribusi ini juga sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi. Karakteristik dari distribusi Weibull untuk dua parameter yaitu λ dan γ, dimana $\lambda > 0$ dan $\gamma > 0$ (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$fx = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \tag{2.11}$$

Dengan nilai espektasi dan variansi secara berurutan adalah:

$$\frac{\Gamma.1+\frac{1}{y}}{\lambda} \text{ dan } \frac{1}{\lambda^2}\Gamma\frac{2}{\gamma}+1-\Gamma(1+\tfrac{1}{\gamma})^2 \tag{2.12}$$

Sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah:

$$Fx,\lambda,\gamma = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}} \tag{2.13}$$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 f(x)dx = 1$ untuk distribusi weibull dua parameter sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f x \ dx = 1 \ f x \ dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^{\gamma}}$$

dimisalkan:

$$u = (\lambda x)^{\gamma}$$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$

$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}dx$$

$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

maka diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} fxdx = \int_{0}^{\infty} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-u} \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-u} du$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi weibull pada persamaan (2.9) berdasarkan definisi (2.8) persamaan (2.10), sebagaiberikut:

$$Ft = \int_{0}^{x} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda\gamma)^{\gamma}} dt$$

misalkan,

$$u = (\lambda x)^{\gamma}$$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$

$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}dx$$

$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

Sehingga,

$$Fx = \int_0^x \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}e^{-(\lambda x)}dx$$

$$= \int_0^x e^{-u}dx$$

$$= -e^{-u}\,{}_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x^{\gamma}}\,{}_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x^{\gamma}} - -e^{-\lambda 0^{\gamma}}$$

$$= -e^{-\lambda x^{\gamma}} + 1$$

$$= 1 - e^{-(\lambda x)^{\gamma}}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Weibull

$$Ex = \int_0^{\infty} \mathrm{xf\ \ x\ dx}$$

$$= \int_0^{\infty} x\lambda\gamma(\lambda\gamma)^{\gamma-1}e^{-(\lambda x)^{\gamma}}dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\lambda\gamma(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}e^{-(\lambda x)^{\gamma}}dx$$

$$= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma}\lambda^{\gamma}\gamma e^{-\lambda x^{\gamma}}dx$$

$$= \int_0^{\infty} (\lambda x)^{\gamma}\gamma e^{-(\lambda x)^{\gamma}}dx$$

misalkan:

$$u = (\lambda x)^{\gamma} \text{ maka } \lambda x = (u)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$x = \frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}$$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$

$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}dx$$

$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

sehingga,

$$E(X) = \int_0^\infty (\lambda x)^\gamma \gamma e^{-(\lambda x)^\gamma} dx$$

$$= \int_0^\infty u\gamma e^{-u} \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^{\gamma}(x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^{\gamma}\left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^{\gamma}} \frac{1}{\left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^{\gamma}} \frac{(\lambda)^{\gamma-1}}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}} du$$

misalkan:

$$u = (\lambda x)^\gamma \text{ maka } \lambda x = (u)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$x = \frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}$$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$

$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}dx$$

$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

sehingga,

$$E(X) = \int_0^\infty (\lambda X)^\gamma e^{-(\lambda x)^\gamma} dx$$

$$= \int_0^\infty u\gamma e^{-u} \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}}$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^\gamma (x)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^\gamma \left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^\gamma} \frac{1}{\left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \frac{1}{(\lambda)^\gamma} \frac{(\lambda)^{\gamma-1}}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}} du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u} \lambda \frac{1}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}} du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{u}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (u)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (u)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-u} \frac{\Gamma 1+\frac{1}{\gamma}^{1+1\gamma}}{\Gamma 1+\frac{1}{\gamma}^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Gamma 1+\frac{1}{\gamma}^{1+\frac{1}{\gamma}} \int_0^\infty \frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-u}}{\Gamma 1+\frac{1}{\gamma}^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Gamma 1+\frac{1}{\gamma}$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Weibull, yaitu sebagai berikut:

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Terlebih dahulu ditentukan:

$$E(X)^2 = \int_0^\infty x^2 fx\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda\gamma(\lambda)^{\gamma-1} (x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} dx$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1} (\lambda)^\gamma \gamma e^{-(\lambda x)^\gamma} dx$$

misal:

$$u = (\lambda x)$$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$

$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} dx$$

$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du$$

maka diperoleh:

$$E(X^2) = \int_0^\infty (x)^{\gamma+1}(\lambda)^\gamma \gamma e^{-u}\,\frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1}(\lambda)^\gamma e^{-u}\,\frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}}$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1}(\lambda)^\gamma e^{-u}\,\frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}}du$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1}(\lambda)^\gamma e^{-u}\,\frac{1}{\lambda(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}}\,du$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1}(\lambda)^\gamma e^{-u}\,\frac{1}{(\lambda)^\gamma (x)^{\gamma-1}}\,du$$

$$= \int_0^\infty (x)^{\gamma+1} e^{-u}\,\frac{1}{(x)^{\gamma-1}}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{\gamma}\,\gamma+1}}{\lambda}\,e^{-u}\,\frac{1}{\frac{u^{\frac{1}{\gamma}\,\gamma-1}}{\lambda}}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(u)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma+1}}\,e^{-u}\,\frac{1}{\frac{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma-1}}}\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(u)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma+1}}\,e^{-u}\,\frac{(\lambda)^{\gamma-1}}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}\,du$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{-2}(u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u}du$$

$$= \lambda^{-2}\int_0^\infty (u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u}\,\frac{\Gamma\frac{2}{\gamma}+1^{\frac{2}{\gamma}+1}}{\Gamma\frac{2}{\gamma}+1^{\frac{2}{\gamma}+1}}$$

$$= \lambda^{-2} \int_0^\infty (u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u} \frac{\Gamma \frac{2}{\gamma} + 1^{\frac{2}{\gamma}+1}}{\Gamma \frac{2}{\gamma} + 1^{\frac{2}{\gamma}+1}}$$

$$= \lambda^{-2} \Gamma \frac{2}{\gamma} + 1^{\frac{2}{\gamma}+1} \int_0^\infty \frac{(u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u}}{\Gamma \frac{2}{\gamma} + 1^{\frac{2}{\gamma}+1}} du$$

$$= \lambda^{-2} \Gamma \frac{2}{\gamma} + 1$$

sehingga,

$$V X = E X^2 - (E(X))^2$$

$$= \lambda^{-2} \Gamma \frac{2}{\gamma} + 1 - \lambda \Gamma .1 + \frac{1}{\gamma}^2$$

$$= \lambda^{-2} \Gamma \frac{2}{\gamma} + 1 - \Gamma .1 + \frac{1}{\gamma}^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \Gamma \frac{2}{\gamma} + 1 - \Gamma .1 + \frac{1}{\gamma}^2$$

2.6 Estimasi Parameter

Dalam menetukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, bergantung pada nilai satu atau lebih parameter. Tujuan dari statistika adalah memberikan nilai pendugaan terhadap parameter-parameter tersebut. Salah satu metode yang sering digunakan adalah metode maksimum *likelihood*.

2.6.1 Fungsi Likelihood

Fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama dari acak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta; X)$ maka :

$$L\theta; X = f(X;\theta) \quad (2.14)$$

Karena $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$ adalah FKP bersama dari variabel acak yang saling bebas, sehingga :

$$f\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta = f\ x_1;\theta\ f\ x_2;\theta\ \ldots\ f\ x_n;\theta \qquad (2.15)$$

Selanjutnya persamaan (2.14) disubsitusikan ke persamaan (2.15) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L\ \theta; X &= f\ x_1; \theta\ f\ x_2; \theta \ldots x_n; \theta \\ &= \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i; \theta) \qquad (2.16) \end{aligned}$$

Contoh 2.6 Misalkan X memiliki FKP sebagai berikut:

$$f\ x;\ \theta = \theta X^{\theta-1}, 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$$

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari distribusi tersebut, tentukanlah fungsi *likelihood* dari θ.

Penyelesaian:

Untuk menentukan fungsi *likelihood* digunakan persamaan (2.16) sehingga diperoleh fungsi *likelihood*nya adalah :

$$\begin{aligned} L\ \theta; X &= f\ x_1; \theta\ f\ x_2;\ \theta \ldots f\ x_n; \theta \\ &= \theta X_1^{\theta-1}. \theta X_2^{\theta-1} \ldots \theta X_n^{\theta-1} \\ &= \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \end{aligned}$$

2.6.2 Estimasi Maksimum Likelihood

Estimasi maksimum *likelihood* (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih θ sebagai estimator titik untuk θ yang memaksimumkan $L(\theta; X)$. Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f\ X; \theta$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta; X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta; X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta; X) = l(X; \theta)$ dimana $l(\theta; X) \geq l(\theta; X)$.

Dengan menggunakan logaritma $L(\theta;X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dl(\theta;X)}{d\theta}=0$ (Lee & Wang, 2003).

Contoh 2.7 Dari Contoh (2.6) diketahui fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L\ \theta;X = \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\ \theta-1}$$

Dari fungsi tersebut, tentukanlah estimator dari $\hat{\theta}$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan estimator dari $\hat{\theta}$, maka kita harus menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood* atau $\ln L\ \theta;X = l(\theta;X)$, yaitu:

$$l\ \theta;X = \ln \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\ \theta-1}$$

$$= \ln \theta^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\ \theta-1}\right)$$

$$= \ln \theta^n + \ln X_1^{\ \theta-1} + \ldots + \ln X_n^{\ \theta-1}$$

$$= n\ \ln\theta + \theta - 1 \ln X_1 + \theta - 1 \ln X_2 + \ldots + \theta - 1 \ln X_n$$

$$= n\ \ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

$$= n\ \ln\theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

karena,

$$\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$$

sehingga,

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} ln\, X_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} lnX_i$$

$$\theta = -\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} lnX_i}$$

Maka estimator maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta}=\theta$,dimana $\theta = -\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} lnX_i}$.

2.6.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Newton-Raphson adalah suatu proses iterasi yang dillakukan dengan metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari pemecahan persamaan tidak linier. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang berulang-ulang dimana setiap penggulangan disebut iterasi. Jika hampiran tidak menghasilkan suatu pemecahan yang sangat dekat dengan pemecahan persamaan yang tidak linier tersebut maka iterasi telah mengalami proses konvergen.

Metode Newton-Raphson dapat diperluas untuk variabel banyak, misal ingin mendapatkan pemecahan untuk $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p$ sedemikian sehingga:

$$l_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p) = 0$$
$$l_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$l_p(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p) = 0$$

Kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial daril_i terhadap θ_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial \theta_j}$

Selanjutnya dibentuk kedalam sebuah matriks yang disebut dengan matriks Jacobian, yaitu:

$$J = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{matrix} \quad (2.17)$$

Kemudian dicari invers dari persamaan (2.17), yaitu:

$$J^{-1} = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{matrix} \quad (2.18)$$

Selanjutnya missal $\theta_1^k, \theta_2^k, \cdots, \theta_p^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke-k, dan misalkan $l_1^k, l_2^k, \cdots, l_p^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi $l_1, l_2, \cdots, l_p$, yaitu:

$$l_1^k = l_1(\theta_1^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_p^k)$$
$$l_2^k = l_2(\theta_1^k, \theta, \ldots, \theta_p^k)$$
$$\vdots$$
$$l_p^k = l_p(\theta_1^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_p^k).$$

Dan misalkan b_{ij}^k adalah elemen dari J^{1} yang dihasilkan pada $\theta_1^k, \theta_2^k, \cdots, \theta_p^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya secara umum

$$\theta_1^{k+1} = \theta_1^k - (b_{11}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \cdots + b_{1p}^k f_p^k)$$
$$\theta_2^{k+1} = \theta_2^k - (b_{21}^k f_1^k + b_{22}^k f_2^k + \cdots + b_{2p}^k f_p^k) \tag{2.19}$$
$$\vdots$$
$$\theta_p^{k+1} = x_p^k - (b_{p1}^k f_1^k + b_{p2}^k f_2^k + \cdots + b_{pp}^k f_p^k)$$

Proses iterasi dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Penggunaan metode Newton-Raphson dilakukan dengan menggunakan iterasi-iterasi hingga didapatkan hasil yang konvergen. Persamaan umum Newton-Raphson dari penurunan deret Taylor sebagai berikut:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \theta^k - f\left(\theta^{(k)}\right) J^{-1}\left(\theta^{(k)}\right),$$

atau

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \theta^k - \frac{l'(\theta^{(k)})}{l''(\theta^{(k)})}, \tag{2.20}$$

Dengan $f(\theta^{(k)})$ adalah vektor gradient berukuran *1 x s* dimana *s* adalah jumlah parameter dari turunan pertama $lnL(\theta)$ terhadap parameternya. $J(\theta^{(k)})$ adalah matriks Jacobian berukuran *s x s* yang berisi turunan kedua fungsi $lnL(\theta)$ terhadap parameternya. Iterasi dapat berhenti apabila $\left\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\right\| < \varepsilon$.

2.6.4 Uji Kebaikan AIC (*Akaike Information Criterion)*

Pemodelan statistik yang melakukan perbandingan terhadap beberapa model, biasanya diikuti dengan uji kebaikan model. Hal ini dilakukan untuk memastikan salah satu model yang terbaik. Beberapa uji kebaikan seperti uji *Kolmogorov smirnov*, *MSE (Mean Squar Error)* dan nilai *AIC (Akaike Information Criterion)*. Menentukan model terbaik dalam data yaitu menggunakan Akaike Information Criteria (AIC). Pada suatu model dikatakan baik apabila nilai AIC nya paling kecil.

Nilai *AIC* tergantung pada nilai *log like-lihood* suatu fungsi kepadatan peluang, nilai *AIC* yang terkenal dapat dijadikan sebagai pedoman untuk menentukan metode yang terbaik dalam mengestimasi parameter. Nilai *AIC* dapat ditentukan dengan rumus:

$$AIC=-2l+2p \tag{2.21}$$

dimana:

l= *log like-lihood*

p= jumlah parameter