BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Sistem Persamaan linier (2.1) di ubah kebentuk matriks, sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix},
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}
$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, sehingga jika diferensialkan secara parsial maka diperoleh:

$$
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \tag{2.3}
$$

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ untuk $f_1 = 2x_1+4x_2$ dan $f_2 = 6x_1+9x_2$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 4x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1+4x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1 + 9x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(6x_1 + 9x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = A$$

Selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}. \tag{2.4}$$

dan,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.5}$$

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 6x_1 & + & 9x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= [2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 6x_1y_2 + 9x_2y_2] \\ &= \begin{bmatrix} 2y_1 & + & 6y_2 \\ 4y_1 & + & 9y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= A^T\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

Jika matriks A adalah simetri $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka berlaku sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, maka:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} &= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 4x_1 & + & 6x_2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Oleh kareana, $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = [4{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 8{x_2}^2]$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 2.4x_1 & + & 2.6x_2 \\ 2.6x_1 & + & 2.8x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2A\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

Selanjutnya pada tugas akhir ini juga digunakan beberapa sifat- sifat pada matriks sebagai berikut:

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad \text{(hukum komutatif pada perkalian)}$$

2.2 Bentuk kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yang bersifat definit positif maupun definit negatif. Diawali dari bentuk kuadratik yaitu $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j dengan

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2.$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j, \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $i = j, j = n\ dan\ c_{ij} \in \mathbb{R}$. Sifat definit positif dan definit negatif dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dapat diperoleh , dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A. Menurut **(Lewis, 1995)** Jika A matriks simetri berukuran $n \times n\ dan\ \lambda_{1,}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka sifat definit bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua $i = 1,2\dots n$
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua $i = 1,2..n$
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1,2..n$
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua $i = 1,2..n$

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Bentuklah notasi sigma $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_ix_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Bentuk kuadrat sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_ix_j = -5x_1x_1 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5x_2$$
$$= -5{x_1}^2 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5{x_2}^2$$
$$= [\ -5x_1\ -5x_2\ ]\ x_1 + [\ -5x_1\ -5x_2\ ]\ x_2$$
$$= \begin{bmatrix} -5x_1 - 5x_2 & -5x_1 - 5x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -10$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

Contoh 2.5:

Tentukanlah sifat definit dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Nilai eigen dari matrik *A* sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 10$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit positif.

Contoh 2.6:

Tentukanlah definit dari matriks $A = \begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Nilai eigen dari matrik *A* sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda + 2 & 1 & 1\\ 1 & \lambda + 1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda + 1\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \text{ dan } \lambda_3 = -1.$$

Jadi, dari nilai eigen matriks *A* dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

2.3 Rank

Definisi 2.2 (Anton, 2004) dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks *A* disebut rank dari *A* dan dinyatakan sebagai rank (*A*).

Berdasarkan defenisi 2.2 diperoleh contoh menentukan rank suatu matriks *A* sebagai berikut:

Contoh 2.7:

Tentukan rank dari matriks *A* berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 3 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Reduksi baris menjadi bentuk eselon:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 3 & 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{B}_2 - 2\mathrm{B}_1 \\ \mathrm{B}_3 - 3\mathrm{B}_1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2 \\ \\ \mathrm{B}_3 - 2\mathrm{B}_2 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{B}_2 \mathrm{x} \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat dua baris tak nol (1,0,0) dan (0,1,-1/2) dari bentuk eselon *A* maka rank (*A*)=2.

2.4 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, dan stabil asimtotik sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Agar Defenisi 2.2 dapat dipahami dengan baik akan diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.8:

Carilah titik ekuilibrium dari persamaan differensial berikut, $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = -x_1$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = -x_2$$

Penyelesaian:

Sistem tersebut dapat ditulis:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya adalah $\bar{\boldsymbol{x}}_1 = 0$, $\bar{\boldsymbol{x}}_2 = 0$

Definisi titik equilibirium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut:

Defenisi 2.3 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Agar defenisi 2.3 dapat dipahami dengan baik akan diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.9:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial berikut $\dot{x} = x$ jika diberikan titik equilibrium $\bar{x} = 0$.

Penyelesaian:

Subtitusi persamaan $\dot{x} = x$ sebagai berikut.

$$\dot{x} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

$$\ln x = t + c$$

Dengan mengambil $x(0) = x_0$ maka :

Untuk $t = 0, x = x_0$,

sehingga

$$\ln x - t = c$$

$$\ln x_0 - 0 = c$$

$$c = \ln x_0$$

sehingga

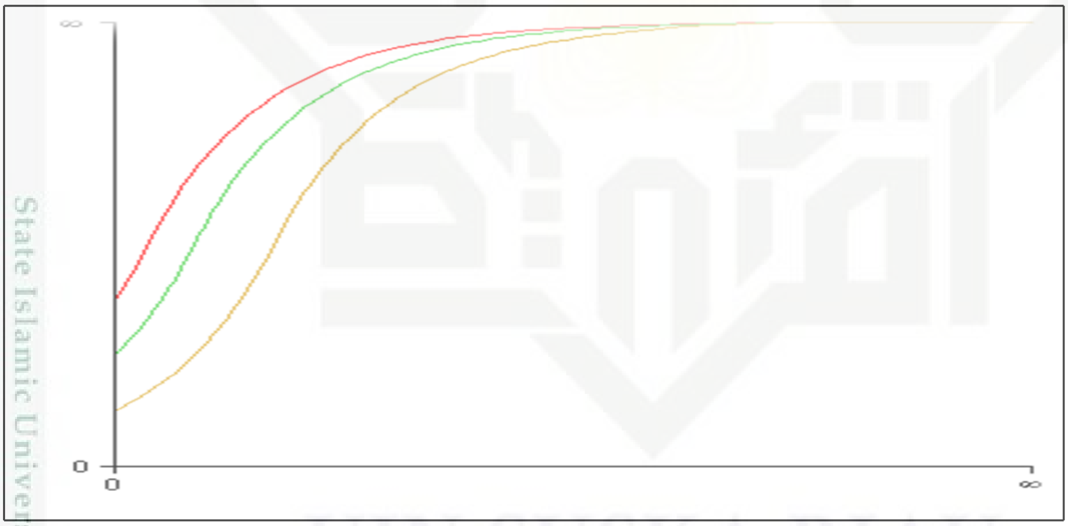
$$\ln x - c = t$$

$$\ln x - \ln x_0 = t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^t$$

$$x = x_0\, e^t$$



Gambar 2.9 Grafik $x = x_0\, e^t$

Sehingga untuk $t \to \infty$ maka $x \to \infty$, dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = x$ tidak stabil karena solusinya menuju ∞.

Contoh 2.10:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Persamaan differensial diatas dapat diuraikan menjadi:

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2$$

Kemudian dengan menghitung masing masing solusi didapat sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -dt$$

$$\ln x_1 = -t + c$$

Oleh karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ ln\, x_0$

Sehingga

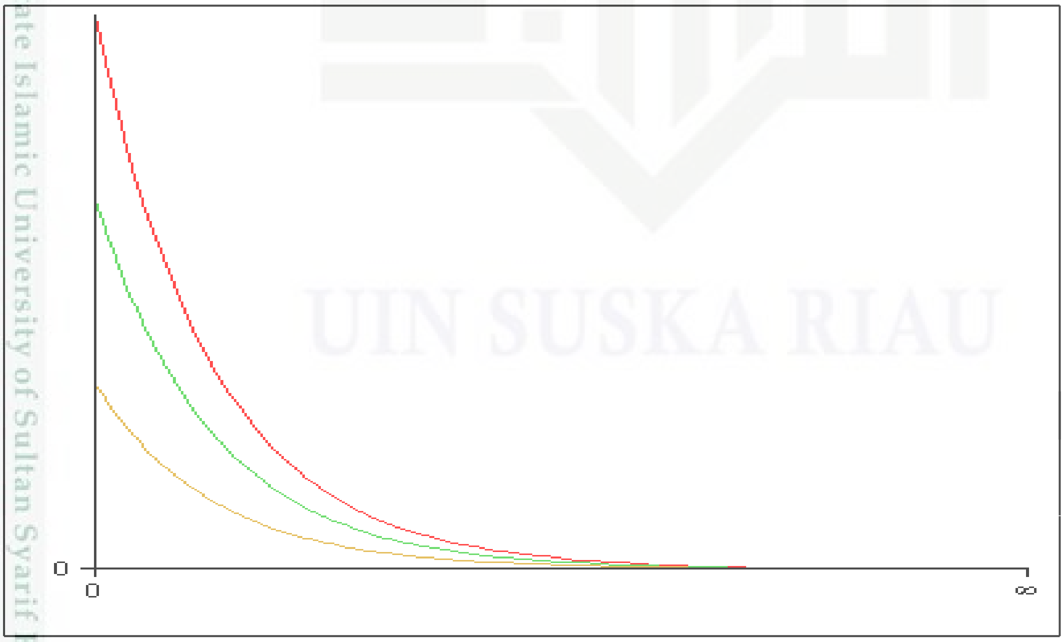
$$\ln x_1 - c = -t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x_1}{x_0} = -t$$

$$x_1 = x_0 . e^{-t}$$

Untuk $t \to \infty$ maka $x_1 \to 0$



Gambar 2.10 Grafik $x_1 = x_0 . e^{-t}$

dan

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

Karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga

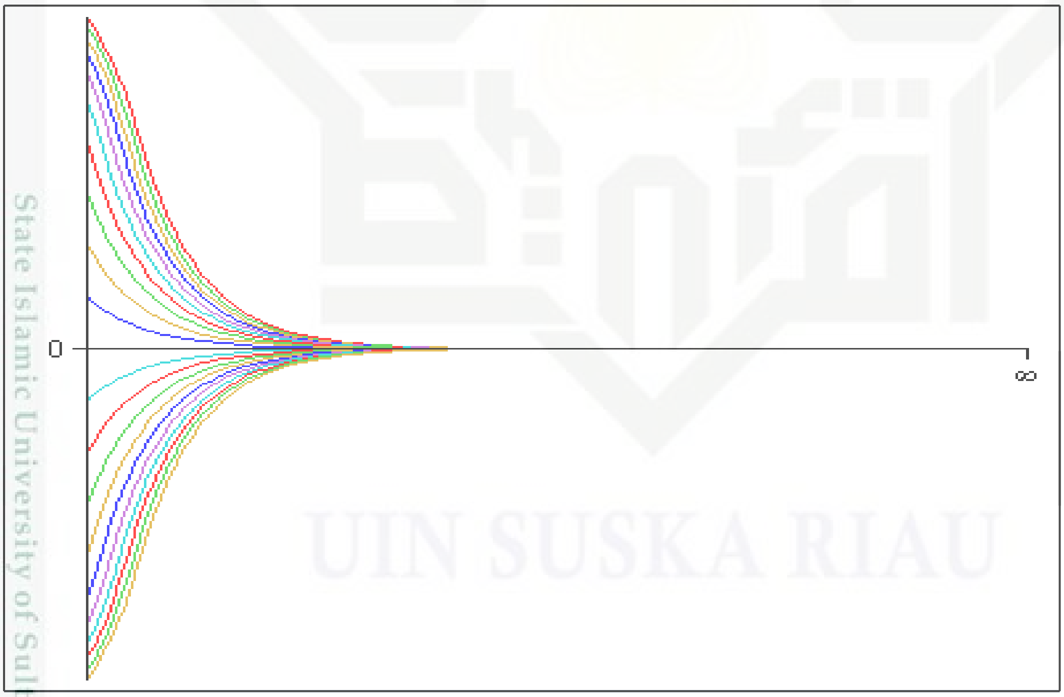
$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$\ln \frac{x_2}{x_0} = -2t$$

$$x_2 = x_0 . e^{-2t}$$

Untuk $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$



Gambar 2.10 Grafik $x_2 = x_0 . e^{-2t}$

Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalahkendali untuk waktu tak berhingga.

2.5.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{2.8}$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor state dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah vektor kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan:

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt, \tag{2.9}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi Objektif.

Persamaan Hamilton : $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \lambda^T(t) f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ (2.10)

Persamaan state : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.11)

Persamaan konstate : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)}{\partial x}(t), \ t \leq T_f.$ (2.12)

Persamaan stasioner : $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (2.13)

2.6 Linier Kuadratik dengan *Output Feedback*

Definisi 2.4 (Lewis, 1995) Diberikan persamaan diferensial untuk sistem dinamik dan persamaan *output feedback* nya adalah sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{2.14}$$

dan

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \tag{2.15}$$

karena $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah fungsi kendali, dan $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$, maka di ketahui fungsi kendali memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{y} \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{u} = -KC\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{x}^T C^T K^{\boldsymbol{T}}$$

Sedangkan fungsi tujuannya adalah sebagai berikut:

$$J = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt \tag{2.17}$$

dengan P adalah sebuah matriks berukuran nxn.

Selanjutnya dari Persamaan (2.15) dan (2.16) sehingga Persamaan (2.14) dapat diubah menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BKC)\boldsymbol{x} = A_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x} \tag{2.18}$$

Selanjutnya dari Persamaan $\boldsymbol{u} = -KC\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{x}^T C^T K^{\boldsymbol{T}}$ diperoleh Persamaan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_F} \boldsymbol{x}^T Q^T + (-\,\boldsymbol{x}^T C^T K^T)R(-\,KC\boldsymbol{x}))dt$$

$$J = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_F} (\boldsymbol{x}^T Q^T + \boldsymbol{x}^T C^T K^T RKC\boldsymbol{x})dt$$

$$J = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_F} (\boldsymbol{x}^T (Q^T + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x})dt \tag{2.19}$$

Diasumsikan $J = 0$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^T (Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x} \tag{2.20}$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\,(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^T (Q^T + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T (Q^T + C^T K^T RCK)\boldsymbol{x}$$

$$A_C\, P + PA_C \; + \; C^T K^T RCK \; + Q = 0 = g \tag{2.21}$$

Kemudian akan dibahas tentang algoritma untuk persamaan *Lyapunov* yang diperlukan untuk meminimalkan fungsi tujuannya. Berdasarkan Persamaan (2.18) dan (2.19) maka diperoleh persamaan Hamilton sebagai berikut:

$$H = (PX) + (gS), \tag{2.22}$$

karena S adalah matriks simetri n x n, dengan g merupakan persamaan (2.21).

dalam masalah linier kuadratik dengan *output feedback* perlu syarat dan kondisi sebagai berikut:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial S} = g = A_C^T P + PA_C + C^T K^T RKC + Q \tag{2.23}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial P} = A_C S + SA_C^T + X \tag{2.24}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial K} = RKCSC^T - 2B^T PSC^T \tag{2.25}$$

Persamaan (2.24) dan Persamaan (2.25) merupakan persamaan *Lyapunov*. Jika R adalah matriks definit positif dan CSC^T bukan matriks singular, maka Persamaan (2.25) dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$0 = RKCSC^T - B^T PSC^T$$

$$K = R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} \tag{2.26}$$

Subtitusikan Persamaan (2.26) ke Persamaan (2.16), maka akan diperoleh fungsi kendali sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{u} = R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1}\, \boldsymbol{y} \tag{2.27}$$

Kemudian dari Persamaan (2.27) maka akan disubtitusikan ke Persamaan (2.15) sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u} = R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} C\boldsymbol{x} \tag{2.28}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (2.28) diubah kedalam Persamaan (2.14) sehingga diperoleh hasil persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(R^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} C\boldsymbol{x})$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BR^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} C)\boldsymbol{x} \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) akan stabil asimtotik jika seluruh nilai eigen dari $(A - BR^{-1}B^T PSC^T (CSC^T)^{-1} C) < 0$ bernilai negatif.

2.7 Desain Keteramatan

Diberikan persamaan deferensial dinamik dengan persamaan *output* sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}, \tag{2.31}$$

Persamaan (2.30) dan (2.31) akan dibuat desain keteramatanya.

Desain keteramatan adalah untuk menemukan perkiraan $\boldsymbol{x}$ dari persamaan *output* $\mathbf{y}$. untuk memperkirakan $\boldsymbol{x}$ perlu di estimasi *state* awal sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}\,(t_0), \tag{2.32}$$

Sehingga dengan estimasi *state* tersebut maka diperoleh persamaan dinamik sebagai berikut:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0). \tag{2.33}$$

Dengan persamaan *output* menjadi $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{C}\hat{\mathbf{x}}$ karena $\boldsymbol{x}$ di estimasi $\hat{\boldsymbol{x}}$ maka terdapat error persamaan *output* yang memenuh:

$$\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - C\hat{\boldsymbol{x}}, \tag{2.34}$$

selanjutnya, untuk kasus *loop tertutup* berdasarkan **(Lewis, 1995)** didefenisikan persamaan dinamik dengan desain keteramatan sebagai berikut:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u} + K\,(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}), \tag{2.35}$$

Persamaan (2.35) menjadi:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (A - KC)\,\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u} + K\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{2.36}$$

Matriks K, disebut matrik keteramatan. Berdasarkan persamaan *output* maka terdapat pula error pada persamaan dinamik desain keteramatan yang didefenisikan yaitu:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}, \tag{2.37}$$

Dengan $\dot{\boldsymbol{x}}$ pada Persamaan (2.30) dan $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}$ pada Persamaan (2.36) maka Persamaan (2.37) menjadi:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - KC)\,\tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{2.38}$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (2.30) jika $\boldsymbol{u} = Kx$ maka diperoleh:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(-Kx) = (A - BK)\boldsymbol{x}\,, \tag{2.39}$$

Oleh karena itu, berdasarkan **(Khan, 2013)** diperoleh bahwa Persamaan deferensial dinamik (2.39) dan Persamaan *error* desain keteramatan (2.38) memenuhi:

$$(A - BK) \Leftrightarrow (A^T - C^T K^T). \tag{2.40}$$

Sehingga jika Persamaan (2.38) dapat dikendalikan (terkendali (A^T, C^T)) maka Persamaan (2.38) dapat diamati (keteramatan (A,C)). Persamaan (2.38) akan stabil jika $\tilde{\boldsymbol{x}} \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow \infty$. Maka Persamaan (2.30) juga akan stabil.