© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, determinan matriks, invers matriks, invers matriks $FLDcrc_r$, matriks kofaktor, serta induksi matematika.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Definisi 2.1 (Sharma, 2011) Matriks adalah susunan dari bilangan-bilangan yang dibatasi dengan tanda kurung biasa ( ) atau kurung siku [ ] yang berbentuk persegi panjang dan disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang menyusun baris dan kolom dari suatu matriks disebut elemen-elemen matriks. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Terdapat beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks bujur sangkar, matriks diagonal, matriks identitas, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks *circulant* dan matriks $FLDcirc_r$. Matriks-matriks tersebut akan disajikan sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar orde n, dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) merupakan diagonal utama dari matriks A

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Definisi 2.3 (**Philip J. Davis, 1979)** Matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar berorde $n \times n$ yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan seperti Persamaan (1.1).

Contoh dari matriks *circulant* berorde 6×6 adalah sebagai berikut

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 (Xue Pan dan Mei Qin, 2015) Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLDcirc_r$ (*the first and the last difference* r*-circulant matrix*) jika memenuhi formula pada Persamaan (1.2).

Contoh dari matriks $FLDcirc_r$ berorde 7×7 adalah sebagai berikut

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 14 & -13 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 2 & -13 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & 2 & -13 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & -13 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & -13 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

Matriks A_7 diatas dapat juga ditulis dengan $A_7 = FLDcirc_2(1,2,3,4,5,6,7)$.

Definisi 2.5 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal. Suatu matriks diagonal umum dapat ditulis sebagai berikut

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*). Suatu matriks segitiga atas dan bawah secara umum dapat ditulis sebagai berikut

a) Matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b) Matriks segitiga atas (*upper triangular*)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.7 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks mxn, Maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks nxm yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya.

Definisi 2.8 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar A adalah simetris jika $A = A^T$. Suatu matriks simetris secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Berikut diberikan definisi dari determinan suatu matriks dan metode yang digunakan untuk menentukan determinan tersebut.

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.9 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Contoh 2.1 Akan ditentukan determinan dari matriks $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$|A_2| \ = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

Contoh 2.2 Akan ditentukan determinan dari matriks $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |A_3| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{32}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka determinan A adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$

Contoh 2.3 Akan ditentukan determinan dari matriks diagonal $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.1 maka $|A_2| = a_{11}a_{22}$.

Contoh 2.4 Akan ditentukan determinan dari matriks segitiga atas $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.1 maka $|A_3| = a_{11}a_{22}a_{33}$

Teorema 2.2 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Contoh 2.5 Akan ditentukan determinan dari matriks $2x2$ dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.2 maka $|A_2| = 0$.

Contoh 2.6 Akan ditentukan determinan dari matriks $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.2 maka $|A_3| = 0$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Definisi 2.10 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks persegi A dikatakan singular apabila $\det(A) = 0$, jika $\det(A) \neq 0$ maka dikatakan matriks nonsingular. Matriks nonsingular memiliki invers dan matriks singular tidak memiliki invers.

Determinan dari matriks bujur sangkar dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu metode Sarrus, metode ekspansi kofaktor, metode CHIO, metode eliminasi Gauss dan metode dekomposisi matriks. Berdasarkan lima metode diatas, penulis hanya menggunakan metode ekspansi kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.11 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekspansi kofaktor dalam teorema berikut.

Teorema 2.3 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, dimana setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari suatu matriks.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.12 (Howard Anton, 2000) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu subsitusi, partisi matriks, matriks adjoin, eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, perkalian matriks invers elementer, dan dekomposisi matriks LU. Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam menentukan invers suatu matriks.

Definisi 2.13 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A memiliki invers. Hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.5 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti:

$$A\, adj(A) = \det(A)\, I$$

$$A\, adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-1 dan kolom ke-1 dari hasil kali $A\, adj(A)$ adalah

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Entri pada baris ke-2 dan kolom ke-2 dari hasil kali $A\, adj(A)$ adalah

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + \cdots + a_{2n}C_{2n}$$

Entri pada baris ke-3 dan kolom ke-3 dari hasil kali $A\, adj(A)$ adalah

$$a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + \cdots + a_{3n}C_{3n}$$

Begitu seterusnya hingga entri pada baris ke-i dan kolom ke-j, sehingga hasil kali $A\, adj(A)$ pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn} \qquad (2.3)$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.3) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dan jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A sehingga nilai dari Persamaan (2.3) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\, adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A)\, I \qquad (2.4)$$

karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$A\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1}A\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = A^{-1}I$$

$$I\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Ada beberapa penelitian terkait dengan invers matriks yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah penelitian oleh Bakti Siregar (2014), Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki (2017). Berikut akan diberikan penjelasannya.

2.4 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz

Matriks toeplitz yang dibahas oleh Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki pada tahun 2017 adalah matriks toeplitz A_n seperti Persamaan (1.4). Mereka telah mendapatkan bentuk umum determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toepliz. Hasilnya disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.6 (Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki, 2017) Diberikan A_n suatu matriks toeplitz bentuk khusus berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.4) dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv 6(mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5) \\ 1, & jika\ n \equiv 6(mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1) \\ -1, & jika\ n \equiv 6(mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Teorema 2.7 (Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki, 2017) Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus A_n berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.4) dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a|A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+1}a^{n-1} \\ (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4|A_1||A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+2}a^{n-2}|A_1| \\ (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+3}a^{n-3}|A_2| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{-n+3}|A_1||A_1| & \cdots & (-1)^{2n-2}a|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}a^{-n+1} & (-1)^{n+2}a^{-n+2}|A_1| & \cdots & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Teorema 2.8 (Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki, 2017) Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus A_n berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.4) dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ maka invers dari matriks A_n adalah

1. Jika $n \equiv 6(mod\ 2)$ atau $n = 6(mod\ 5)$, maka A_n tidak mempunyai invers.
2. Jika $n \equiv 6(mod\ 0)$ atau $n = 6(mod\ 1)$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+1}a^{n-1} \\ (-1)^3 a^1|A_{n-2}| & (-1)^4|A_1||A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+2}a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+3}a^{-n+3}|A_2| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{n-3}|A_1||A_1| & \cdots & (-1)^{2n-2}a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}a^{n-1} & (-1)^{n+2}a^{n-2}|A_1| & \cdots & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Jika $n \equiv 6(mod\ 3)$ atau $n = 6(mod\ 4)$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+1}a^{n-1} \\ (-1)^3 a^1|A_{n-2}| & (-1)^4|A_1||A_{n-2}| & \cdots & (-1)^{n+2}a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+3}a^{-n+3}|A_2| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{n-3}|A_1||A_1| & \cdots & (-1)^{2n-2}a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}a^{n-1} & (-1)^{n+2}a^{n-2}|A_1| & \cdots & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Salah satu metode yang digunakan untuk membuktikan rumus yang di peroleh dari bentuk pola adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi dari induksi matematika.

2.5 Induksi Matematika

Definisi 2.14 (Rinaldi Munir, 2007) Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, maka untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dengan menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Contoh 2.7 Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Penyelesaian:

Misalkan bahwa $p(n)$ menyatakan proposisi bahwa untuk $n \geq 1$, jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)}{2}$, yaitu $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kebenaran proposisi ini harus dibuktikan dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

1. Basis induksi: akan ditunjukkan untuk $n = 1$ maka $p(1)$ benar, yaitu

$$p(1) = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$= 1$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

2. Langkah induksi: misalkan $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar (hipotesis induksi), maka akan ditunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar,yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = (n + 1)\,[(n + 1) + 1]/2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n + 1) \\ &= [n(n + 1)]/2 \ + (n + 1) \\ &= [n^2 + n/2] + (n + 1) \\ &= [n^2 + n/2] + [(2n + 2)/2] \\ &= (n^2 + 3n + 2) \ /2 \\ &= (n + 1)(n + 2)/2 \\ &= (n + 1)[(n + 1) + 1]/2 \end{aligned}$$

Karena langkah (1) dan (2) telah terbukti benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.