# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Menurut Howard Anton dan Chris Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan real. Terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya matriks *circulant* dan matriks $FLDcirc_r$. Menurut Philip J. Davis (1979) matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan. Bentuk umum dari matriks *circulant* adalah sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Menurut Xue Pan dan Mei Qin (2015), matriks $FLDcirc_r$ adalah sebuah tipe baru dari matriks *circulant*. Bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 - ra_2 & ra_4 - ra_3 & \cdots & a_0 - ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - ra_1 & ra_3 - ra_2 & \cdots & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

dapat ditulis dengan $A = FLDcirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers suatu matriks. Invers mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Banyak metode yang digunakan dalam mencari invers matriks diantaranya subsitusi, partisi matriks, matriks adjoin, eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, perkalian matriks invers elementer, dan dekomposisi matriks *LU*. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks. Semakin besar ukuran suatu matriks maka semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks. Salah satu kegunaan invers suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak kegunaannya dalam memudahkan pengambilan keputusan di berbagai bidang, diantarnya bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia dan lainnya.

Tahun 2014 Bakti Siregar telah membahas dalam makalahnya mengenai invers suatu matriks dengan judul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Makalah tersebut merumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Adapun hasil yang di peroleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut:

1. Rumus determinan matriks toeplitz beorde $n$ pada Persamaan (1.3) adalah
$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1) x^n$$
2. Rumus kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dari matriks toeplitz berorde $n$ pada Persamaan (1.3) adalah
$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ;\text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1} x^{n-1} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$
3. Rumus invers dari matriks toeplitz beorde $n$ pada Persamaan (1.3) adalah
$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Selain itu, pada tahun 2017 Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki telah melakukan penelitian mengenai invers matriks toeplitz tridiagonal dalam bentuk khusus seperti berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$. Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh bentuk umum determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toepliz berbentuk khusus pada Persamaan (1.4).

Berdasarkan hasil di atas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (1.3) dan Persamaan (1.4). Sehingga untuk menghitung determinan, matriks kofaktor dan invers tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode biasa yang digunakan, cukup dengan mensubsitusikan nilai $a, r, x$ dan $n$ yang ada pada matriks ke rumus-rumus di atas.

Berdasarkan lakar belakang di atas, penulis tertarik untuk membuat bentuk umum determinan, matriks kofaktor, dan invers suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan metode adjoin.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah, menentukan bentuk umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus menggunakan metode adjoin.

## 1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat. Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada hal-hal sebagai berikut :

1. Matriks yang dibahas beorde $n \geq 2$
2. Mencari determinan menggunakan ekspansi kofaktor.
3. Menggunakan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } x, r \in \mathbb{R} \qquad (1.5)$$

Persamaaan (1.5) dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r(0, x, 0,0, \ldots, 0)$.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Mendapatkan bentuk umum determinan matriks $FLDcirc_r$ yang sesuai dengan Persamaan (1.5) menggunakan ekspansi kofaktor.
2. Mendapatkan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks $FLDcirc_r$ yang sesuai dengan Persamaan (1.5).
3. Mendapatkan bentuk umum invers matriks $FLDcirc_r$ yang sesuai dengan Persamaan (1.5) menggunakan metode adjoin.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

1. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai matriks, khususnya determinan, matriks kofaktor dan invers suatu matriks.
2. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan determinan, matriks kofaktor dan invers suatu matriks.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

**BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

**BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, determinan matriks, invers matriks, matriks $FLDcrc_r$, matriks kofaktor, serta induksi matematika.

**BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum determinan, matriks kofaktor, dan invers suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan metode adjoin.

**BAB IV PEMBAHASAN**

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum determinan, matriks kofaktor, dan invers suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan metode adjoin.

**BAB V KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis