BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai uraian teori-teori yang mendasari pemecahan tentang masalah-masalah yang berhubungan dengan determinan matriks interval persegi panjang. Uraian teori-teori ini akan digunakan untuk mendapatkan langkah-langkah dalam menentukan determinan matriks interval persegi panjang. Teori-teori yang akan diuraikan diantaranya mengenai matriks interval, aritmatika interval, determinan matriks interval dan determinan radic.

2.1 Matriks Interval

Definisi 2.1 (Rohn, 2005) Jika $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ adalah dua matriks dalam ruang $\mathbb{R}^{n\times n}$, maka himpunan matriks $\boldsymbol{A} = [\underline{A}\,,\overline{A}] = \{A : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$ di sebut matriks interval. Sedangkan matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ disebut batas interval.

Karenanya, jika $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ dan $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$, maka $\boldsymbol{A}$ adalah himpunan semua matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi

$$\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$$

Dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$.

Contoh 2.1 : Diberikan contoh matriks interval berukuran 2×2 sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = [\underline{A}\,,\overline{A}] = \begin{bmatrix} [3,6] & [4,7] \\ [1,4] & [-2,5] \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan matriks interval, akan ditemukan aritmatika interval dalam operasi menentukan determinan tersebut. Berikut akan diulas mengenai masalah operasi aritmatika interval.

2.2 Operasi Aritmatika Interval

Operasi aritmatika interval berbeda dengan operasi aritmatika real. Ada dua definisi berbeda yang membahas operasi aritmatika interval yaitu definisi yang ditulis oleh Analia Wenda pada tahun 2014 dalam makalahnya dengan judul

"Kajian Operasi Aritmatika Interval dan Sifat-sifatnya", dan definisi yang ditulis oleh K. Ganesan pada tahun 2007 dalam makalahnya dengan judul "*On Some Properties of Interval Matrices*".

Definisi 2.2 (Wenda, 2014) Interval tertutup adalah himpunan semua bilangan real x untuk sebarang konstanta real $\underline{x}$ dan $\bar{x}$ dengan $\underline{x} \leq \bar{x}$ dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ dan dinotasikan $[\underline{x}, \bar{x}]$.

Titik $\underline{x}$ disebut titik ujung bawah (*lower endpoints*) dan titik $\bar{x}$ disebut titik ujung atas (*upper endpoints*) dari suatu interval X.

(i) Penjumlahan Interval

Misalkan X dan Y adalah interval. Jumlah dari X dan Y didefinisikan sebagai : $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ dan $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$
$$= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

Contoh 2.2 :

$X = [4, 7]$ dan $= [5, 8]$, maka $X + Y$ adalah :

$$X + Y = [4 + 5, 7 + 8]$$
$$= [9, 15]$$

(ii) Pengurangan Interval

Negatif dari suatu interval didefinisikan sebagai : $-X = \{-x, x \in X\}$ yang dapat kita tuliskan : $-X = -[\underline{x}, \bar{x}] = [-\bar{x}, -\underline{x}]$.

Batas atas $-X$ adalah $-\bar{x}$ dan batas bawah $-X$ adalah $-\underline{x}$.

Contoh 2.3 :

a. $X = [3, 5]$ maka $-X = [-5, -3]$
b. $X = [-3, 5]$ maka $-X = [-5, 3]$

Dengan pengertian negatif interval di atas maka pengurangan interval X oleh interval Y menjadi penjumlahan interval X dengan negatif interval Y.

$$X - Y = [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}]$$
$$= [\underline{x}, \bar{x}] + [-\bar{y}, -\underline{y}]$$

$$= \left[\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}\right]$$

Contoh 2.4 :

$X = [3\,,5]$ dan $Y = [8\,,11]$ maka

$$X - Y = [3\,,5] - [8\,,11]$$
$$= [3\,,5] + [-11\,,-8]$$
$$= [3 - 11, 5 - 8]$$
$$= [-8\,,-3]$$

(iii) Perkalian Interval

Perkalian dua interval X dan Y didefinisikan sebagai :

$X \cdot Y = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ yang dapat dituliskan :

$$X \cdot Y = \left[min\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}, maks\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]$$

Contoh 2.5 :

$X = [2\,,4]$ dan $Y = [-2\,,3]$ maka

$$X \cdot Y = \left[min\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}, maks\left\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\right\}\right]$$
$$= [min\{(2)(-2), (2)(3), (4)(-2), (4)(3)\},$$
$$maks\{(2)(-2), (2)(3), (4)(-2), (4)(3)\}]$$
$$= [min\{-4, 6, -8, 12\}, maks\{(-4, 6, -8, 12\}]$$
$$= [-8\,,12]$$

(iv) Pembagian Interval

Apabila X adalah satu interval yang tidak mengandung 0, kebalikan dari X didefinisikan sebagai :

$$\frac{1}{X} = \left\{\frac{1}{x} :\ x\ \in X\right\}$$

Dengan memperhatikan batas atas dan batas bawahnya maka,

$$\frac{1}{X} = \left[\frac{1}{\overline{x}}\,, \frac{1}{\underline{x}}\right]$$

Pembagian X oleh Y adalah perkalian antara X dengan kebalikan Y. Dapat ditulis dengan :

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = [\underline{x}\,, \overline{x}\,] \cdot \left[\frac{1}{\overline{y}}\,, \frac{1}{\underline{y}}\right]$$

Contoh 2.6 :

$X = [4\,,10]$ dan $Y = [2\,,10]$, maka

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = [\underline{x}\,,\overline{x}\,] \cdot \left[\frac{1}{\overline{y}}\,,\frac{1}{\underline{y}}\right] = [4\,,10] \cdot \left[\frac{1}{10}\,,\frac{1}{2}\right] = [4\,,10] \cdot [0.1\,,0.5]$$

$$= [0.4\,,5]$$

Selanjutnya definisi yang ditulis oleh K. Ganesan pada tahun 2007 dalam makalahnya dengan judul "*On Some Properties of Interval Matrices*".

Definisi 2.3 (Ganesan, 2007) Untuk $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dalam I$\mathbb{R}$ dan untuk $\{+,-,\times,\div\}$, kita definisikan sebagai :

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \left[m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) + k\right]$$

dengan

midpoint atau $m(\tilde{a}) = \left(\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2}\right)$

width atau $w(\tilde{a}) = \left(\frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}\right)$

$$k = \min\left\{\left(m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - m(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right)\right\}$$

Berikut ini diberikan bentuk umum dari aritmatika interval yang dimodifikasi.

(i) Penjumlahan

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [\underline{a}\,,\overline{a}] + [\underline{b}\,,\overline{b}]$$

$$= \left[m(\tilde{a}) + m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) + m(\tilde{b}) + k\right]$$

dengan:

$$k = \left(\frac{(\overline{b}+\overline{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right)$$

(ii) Pengurangan

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [\underline{a}\,,\overline{a}] - [\underline{b}\,,\overline{b}]$$

$$= \left[m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) + k\right]$$

dengan:

$$k = \left(\frac{(\bar{b}+\bar{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right)$$

(iii) Perkalian

$$\tilde{a}\tilde{b} = [\underline{a}\,,\bar{a}][\underline{b}\,,\bar{b}]$$

$$= [m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a})m(\tilde{b}) + k]$$

dengan :

$$k = \min\left\{\left(m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - m(\tilde{a})m(\tilde{b})\right)\right\}$$

$$\alpha = min\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\bar{b}, \bar{a}\,\underline{b}, \bar{a}\,\bar{b}\}$$

$$\beta = max\{\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\bar{b}, \bar{a}\,\underline{b}, \bar{a}\,\bar{b}\}$$

(iv) Pembagian

$$\frac{1}{\tilde{a}} = \tilde{a}^{-1} = [\underline{a}, \bar{a}]^{-1} = \left[\frac{1}{m(\tilde{a})} - k, \frac{1}{m(\tilde{a})} + k\right]$$

dengan :

$k = min\left\{\frac{1}{\bar{a}}\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{\underline{a}+\bar{a}}\right), \frac{1}{\underline{a}}\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{\underline{a}+\bar{a}}\right)\right\}$ dan $0 \notin [\underline{a}\,, \bar{a}]$

Contoh 2.7 :

Diberikan $\tilde{a} = [-1, 3]$ dan $\tilde{b} = [1, 4]$. Tentukanlah hasil dari $(\tilde{a} + \tilde{b}), (\tilde{a} - \tilde{b})$, $(\tilde{a}\tilde{b})$ dan $\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right)$!

Penyelesaian :

Sebelum melakukan perhitungan, perlu dicari :

$m(\tilde{a}) = \left(\frac{-1+3}{2}\right) = 1$ dan $m(\tilde{b}) = \left(\frac{1+4}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Selanjutnya lakukan operasi aritmatikanya :

(i) $(\tilde{a} + \tilde{b})$ dan $(\tilde{a} - \tilde{b})$

Pertama harus tentukan nilai k sebagai berikut :

$$k = \left(\frac{(4+3)-(1+(-1))}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

maka :

$$(\tilde{a}+\tilde{b}) = [-1,3]+[1,4]$$

$$= \left[1+\frac{5}{2}-\frac{7}{2}, 1+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right] = [0\,,7]$$

$$(\tilde{a}-\tilde{b}) = [-1,3]-[1,4]$$

$$= \left[1-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}, 1-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right] = [-5\,,2]$$

(ii) $(\tilde{a}\tilde{b})$

Sebelum dilakukan perkalian $\tilde{a}\tilde{b}$ perlu ditentukan dahulu :

$$\alpha = min\{(-1)1,(-1)4,(3)1,(3)4\} = -4$$

$$\beta = max\{(-1)1,(-1)4,(3)1,(3)4\} = 12$$

$$m(\tilde{a}) = \left(\frac{-1+3}{2}\right) = 1 \text{ dan } m(\tilde{b}) = \left(\frac{1+4}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$k = \min\left\{\left((1)\frac{5}{2}-(-4), 12-(1)\frac{5}{2}\right)\right\} = \frac{13}{2}$$

maka

$$(\tilde{a}\tilde{b}) = [-1,3][1,4] = \left[1\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{13}{2}, 1\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{13}{2}\right] = [-4\,,9]$$

(iii) $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}$

Untuk menentukan $\tilde{b}^{-1}$:

$$\tilde{b}^{-1} = \frac{1}{[1,4]}$$

$$m(\tilde{b}) = \left(\frac{1+4}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$k = min\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{4-1}{1+4}\right), \frac{1}{1}\left(\frac{4-1}{1+4}\right)\right\} = \frac{3}{20}$$

maka :

$$\tilde{b}^{-1} = \left[\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)} - \frac{3}{20}, \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{3}{20}\right] = \left[\frac{2}{5} - \frac{3}{20}, \frac{2}{5} + \frac{3}{20}\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{11}{20}\right]$$

Setelah $\tilde{b}^{-1}$ di dapatkan,selanjutnya menentukan $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$ sebagai berikut :

$$\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = [-1, 3]\left[\frac{1}{4}, \frac{11}{20}\right]$$

Selanjutnya harus ditentukan terlebih dahulu :

$$\alpha = min\left\{(-1)\frac{1}{4}, (-1)\frac{11}{20}, (3)\frac{1}{4}, (3)\frac{11}{20}\right\} = -\frac{11}{20}$$

$$\beta = max\left\{(-1)\frac{1}{4}, (-1)\frac{11}{20}, (3)\frac{1}{4}, (3)\frac{11}{20}\right\} = \frac{33}{20}$$

$$m(\tilde{a}) = \left(\frac{-1+3}{2}\right) = 1 \text{ dan } m(\tilde{b}^{-1}) = \left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{11}{20}}{2}\right) = \frac{2}{5}$$

$$k = \min\left\{\left((1)\frac{2}{5} - \left(-\frac{11}{20}\right), \frac{33}{20} - (1)\frac{2}{5}\right)\right\} = \frac{19}{20}$$

maka

$$\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = [-1, 3]\left[\frac{1}{4}, \frac{11}{20}\right] = \left[1\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{19}{20}, 1\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{19}{20}\right] = \left[-\frac{11}{20}, \frac{27}{20}\right]$$

$$= [-0.55, 1.35]$$

Determinan matriks interval tidak jauh berbeda dengan menentukan determinan matriks real. Berikut akan dijelaskan mengenai matriks interval.

2.3 Determinan Matriks Interval

Salah satu metode untuk menentukan determinan matriks dengan entri bilangan real adalah dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Pada subbab ini kita akan mengulas sedikit masalah metode ekspansi kofaktor pada matriks real.

Definisi 2.4 (Kolman, 1991) : Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $n \times n$. Lalu M_{ij} menjadi $(n-1) \times (n-1)$ submatriks dari A yang didapatkan dengan menghilangkan baris ke-i kolom ke-j pada matriks A. Determinan $\det(M_{ij})$ disebut *minor* dari (a_{ij}).

Definisi 2.5 (Kolman, 1991) : Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $n \times n$. Kofaktor A_{ij} dari a_{ij} didefinisikan sebagai $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

Dari Definisi 2.4 dan Definisi 2.5 diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.8 :

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan minor entri a_{12}, a_{23}, a_{31}dan tentukan kofaktor entri a_{12}, a_{23}, a_{31} !

Penyelesaian :

Minor entri $a_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 0) = 9$,

Kofaktor entri $a_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = (-1)(9) = -9$

Minor entri $a_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = ((-2) - 0) = -2$

Kofaktor entri $a_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = (-1)(-2) = 2.$

Minor entri $a_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 20) = -19$.

Kofaktor entri $a_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31}) = (1)(-19) = -19.$

Determinan dari matriks interval persegi $\boldsymbol{A}$ dengan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i adalah $\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\boldsymbol{A}_{ij}$, dimana $\boldsymbol{A}_{ij}$ adalah kofaktor dari a_{ij} (Nirmala, T: 2011). Berdasarkan pernyataan Nirmala T (2011) tersebut, berikut diberikan contoh untuk matriks interval berukuran 2×2 dan 3×3 sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Maka $\det(\boldsymbol{A})$ dan $det(\boldsymbol{B})$ adalah sebagai berikut:

a. Untuk matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran 2×2 maka :

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b. Untuk matriks $\boldsymbol{B}$ berukuran 3×3 akan dilakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$ yaitu :

$det(\boldsymbol{B}) = b_{i1}\boldsymbol{B}_{i1} + b_{i2}\boldsymbol{B}_{i2} + b_{i3}\boldsymbol{B}_{i3}$

Dengan $\boldsymbol{B}_{i1}$, $\boldsymbol{B}_{i2}$, dan $\boldsymbol{B}_{i3}$ adalah kofaktor dari b_{i1}, b_{i2}, dan b_{i3}.

Maka ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$ adalah :

$$
\begin{aligned}
det(\boldsymbol{B}) &= b_{11}\boldsymbol{B}_{11} + b_{12}\boldsymbol{B}_{12} + b_{13}\boldsymbol{B}_{13} \\
&= b_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} + b_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad b_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\
&= b_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & \tilde{b}_{33} \end{vmatrix} - b_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\
&= b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + \\
&\quad b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})
\end{aligned}
$$

Berikut diberikan contoh menentukan determinan matriks interval. Ada dua aritmatika yang akan digunakan, yaitu berdasarkan Definisi 2.2 dan Definisi 2.3.

Contoh 2.9 : Diberikan matriks interval :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [1\,,3] & [-1\,,1] \\ [2\,,4] & [0\,,1] \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [0\,,1] & [1\,,3] & [2\,,3] \\ [2\,,5] & [1\,,2] & [-1\,,0] \\ [1\,,2] & [0\,,1] & [1\,,3] \end{bmatrix}$$

Tentukan determinan dari $\boldsymbol{A}$ dan !

Penyelesaian :

1. Karena $\boldsymbol{A}$ berukuran 2×2, maka :

$$
\begin{aligned}
\det\,(\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} [1\,,3] & [-1\,,1] \\ [2\,,4] & [0\,,1] \end{vmatrix} \\
&= [1\,,3][0\,,1] - [-1\,,1][2\,,4]
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2 maka :

$$
\begin{aligned}
\det\,(\boldsymbol{A}) &= [1\,,3][0\,,1] - [-1\,,1][2\,,4] \\
&= [0\,,3] - [-4\,,4] \\
&= [-4\,,7] \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Definisi 2.3 :

Untuk $[1\,,3][0\,,1]$ terlebih dahulu menentukan

$\alpha = min\{(1)0, (1)1, (3)0, (3)1\} = 0$

$\beta = max\{(1)0, (1)1, (3)0, (3)1\} = 3$

$m(\tilde{a}) = \left(\frac{1+3}{2}\right) = 2$ dan $m(\tilde{b}) = \left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$k = \min\left\{\left((2)\frac{1}{2} - 0{,}3 - (2)\frac{1}{2}\right)\right\} = 1$$

maka

$$(\tilde{a}\tilde{b}) = [1\ ,3][0\ ,1]\ = \left[(2)\frac{1}{2} - 1, (2)\frac{1}{2} + 1\right] = [0\ ,2]$$

Untuk $[-1\ ,1][2\ ,4]$ dengan menggunakan cara yang sama diperoleh hasil $[-4\ ,4]$.

Selanjutnya :

$$\begin{aligned}\det\ (\boldsymbol{A}) &= [1\ ,3][0\ ,1] - [-1\ ,1][2\ ,4] \\ &= [0\ ,2] - [-4\ ,4]\end{aligned}$$

sebelum melakukan perhitungan, perlu dicari :

$m(\tilde{a}) = \left(\frac{0+4}{2}\right) = 2\ ,\ m(\tilde{b}) = \left(\frac{-4+4}{2}\right) = 0$

$$k = \left(\frac{(4+2) - ((-4) + (0))}{2}\right) = \frac{10}{2} = 5$$

maka :

$$\det\ (\boldsymbol{A}) = [1 - 0 - 5, 1 - 0 + 5] = [-4\ ,6] \tag{2.2}$$

Berdasarkan Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2), dari dua cara yang berbeda dengan matriks interval berukuran 2×2 yang sama menghasilkan nilai yang tidak sama.

2. Kita akan mencari det($\boldsymbol{B}$) menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} [0\ ,1] & [1\ ,3] & [2\ ,3] \\ [2\ ,5] & [1\ ,2] & [-1\ ,0] \\ [1\ ,2] & [0\ ,1] & [1\ ,3] \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
det(\boldsymbol{B}) &= b_{11}\boldsymbol{B}_{11} + b_{12}\boldsymbol{B}_{12} + b_{13}\boldsymbol{B}_{13} \\
&= [0\,,1](-1)^{1+1}\begin{vmatrix}[1\,,2] & [-1\,,0] \\ [0\,,1] & [1\,,3]\end{vmatrix} + \\
&\quad [1\,,3](-1)^{1+2}\begin{vmatrix}[2\,,5] & [-1\,,0] \\ [1\,,2] & [1\,,3]\end{vmatrix} + \\
&\quad [2\,,3](-1)^{1+3}\begin{vmatrix}[2\,,5] & [1\,,2] \\ [1\,,2] & [0\,,1]\end{vmatrix} \\
&= [0\,,1]\begin{vmatrix}[1\,,2] & [-1\,,0] \\ [0\,,1] & [1\,,3]\end{vmatrix} - [1\,,3]\begin{vmatrix}[2\,,5] & [-1\,,0] \\ [1\,,2] & [1\,,3]\end{vmatrix} + \\
&\quad [2\,,3]\begin{vmatrix}[2\,,5] & [1\,,2] \\ [1\,,2] & [0\,,1]\end{vmatrix} \\
&= [0\,,1]([1\,,2][1\,,3] - [-1\,,0][0\,,1]) - \\
&\quad [1\,,3]([2\,,5][1\,,3] - [-1\,,0][1\,,2]) + \\
&\quad [2\,,3]([2\,,5][0\,,1] - [1\,,2][1\,,2])
\end{aligned}
$$

Berdasarkan definisi 2.2 maka :

$$
\begin{aligned}
det(\boldsymbol{B}) &= [0\,,1]([1\,,2][1\,,3] - [-1\,,0][0\,,1]) - \\
&\quad [1\,,3]([2\,,5][1\,,3] - [-1\,,0][1\,,2]) + \\
&\quad [2\,,3]([2\,,5][0\,,1] - [1\,,2][1\,,2]) \\
&= [0\,,1]([1\,,6] - [-1\,,0]) - [1\,,3]([2\,,15] - [-2\,,0]) + \\
&\quad [2\,,3]([0\,,5] - [1\,,4]) \\
&= [0\,,1][1\,,7] - [1\,,3][2\,,17] + [2\,,3][-4\,,4] \\
&= [0\,,7] - [2\,,51] + [-12\,,12] \\
&= [-63\,,17] \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan definisi 2.3 maka :

$$
\begin{aligned}
det(\boldsymbol{B}) &= [0\,,1]([1\,,2][1\,,3] - [-1\,,0][0\,,1]) - \\
&\quad [1\,,3]([2\,,5][1\,,3] - [-1\,,0][1\,,2]) + \\
&\quad [2\,,3]([2\,,5][0\,,1] - [1\,,2][1\,,2]) \\
&= [0\,,1]([1\,,5] - [-0.5\,,0]) - [1\,,3]([2\,,12] - [-1.5\,,0]) + \\
&\quad [2\,,3]([0\,,3.5] - [1\,,3.5]) \\
&= [0\,,1][1\,,5] - [1\,,3][2\,,12] + [2\,,3][-2.5\,,3.5] \\
&= [0\,,3] - [2\,,26] + [-5\,,7.5] \\
&= [-33.5\,,6] \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.4), dari dua cara yang berbeda dengan matriks interval berukuran 3×3 yang sama menghasilkan nilai yang tidak sama.

Proses untuk menentukan determinan matriks interval tidak hanya menggunakan ekspansi kofaktor akan tetapi dapat menggunakan cara lain. Salah satunya adalah eliminisai Gauss yang di bahas oleh Egi Zulkarnain pada tahun 2015 dengan judul "Algoritma Eliminasi Gauss Interval dalam Mendapatkan Nilai Determinan Matriks Interval dan Mencari Solusi Sistem Persamaan Interval Linear".

Dalam subbab ini akan diulas sedikit mengenai perbandingan hasil yang diperoleh dari cara yang berbeda dalam menentukan determinan matriks interval dengan entri-entri yang sama yaitu eliminasi Gauss dan ekspansi kofaktor. Berdasarkan pembahasan Egi Zulkarnain, aritmatika yang digunakan dalam proses menentukan determinan matriks interval dengan menggunakan eliminasi Gauss adalah modifikasi aritmatika interval berdasarkan Definisi 2.3.

Pada subbab ini penulis akan menggunakan aritmatika interval berdasarkan Definisi 2.2 dan menggunakan modifikasi aritmatika interval berdasarkan Definisi 2.3 dengan menggunakan ekspansi kofaktor.

Berikut adalah contoh soal yang terdapat dalam makalahnya Egi Zulkarnain.

Contoh 2.10 : Tentukan determinan matriks interval berikut !

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} [4,6] & [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [-6\,,-4] & [-1\,,1] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [9\,,11] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-11\,,-9] \end{vmatrix}$$

Penyelesaian :

$$|\boldsymbol{A}| = [4,6] \begin{vmatrix} [-6\,,-4] & [-1\,,1] & [-1\,,1] \\ [\ [-1\,,1] & [9\,,11] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-11\,,-9] \end{vmatrix} -$$

$$[-1\,,1] \begin{vmatrix} [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [9\,,11] & [-1\,,1] \\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-11\,,-9] \end{vmatrix} +$$

$$[-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-6\,,-4] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix} -$$

$$[-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-6\,,-4] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [9\,,11]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}$$

$$= [4,6]\left([-6\,,-4]\begin{vmatrix}[9\,,11] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix} - [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [9\,,11]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}\right) -$$

$$[-1\,,1]\left([-1\,,1]\begin{vmatrix}[9\,,11] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix} - [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [9\,,11]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}\right) +$$

$$[-1\,,1]\left([-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix} - [-6\,,-4]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-11\,,-9]\end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}\right) -$$

$$[-1\,,1]\left([-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [9\,,11]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix} - [-6\,,-4]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [9\,,11]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + [-1\,,1]\begin{vmatrix}[-1\,,1] & [-1\,,1]\\ [-1\,,1] & [-1\,,1]\end{vmatrix}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 sebagai berikut :

$$|\boldsymbol{A}| = [4,6]([-6\,,-4]([-121\,,-81] - [-1\,,1]) - [-1\,,1]([-11\,,11] - [-1\,,1]) + [-1\,,1]([-1\,,1] - [-11\,,11])) -$$

$$[-1\,,1]([-1\,,1]([-121\,,-81] - [-1\,,1]) - [-1\,,1]([-11\,,11] - [-1\,,1]) + [-1\,,1]([-1\,,1] - [-11\,,11])) +$$

$$[-1\,,1]([-1\,,1]([-11\,,11] - [-1\,,1]) - [-6\,,-4]([-11\,,11] - [-1\,,1]) + [-1\,,1]([-1\,,1] - [-1\,,1])) -$$

$$[-1\,,1]([-1\,,1]([-1\,,1] - [-11\,,11]) - [-6\,,-4]([-1\,,1] - [-11\,,11]) + [-1\,,1]([-1\,,1] - [-1\,,1]))$$

$$= [4,6]([-6,-4][-122,-80] - [-1,1][-12,12] + [-1,1][-12,12]) -$$

$$[-1,1]([-1,1][-122,-80] - [-1,1][-12,12] + [-1,1][-12,12]) +$$

$$[-1,1]([-1,1][-12,12] - [-6,-4][-12,12] + [-1,1][-2,2]) -$$

$$[-1,1]([-1,1][-12,12] - [-6,-4][-12,12] + [-1,1][-2,2])$$

$$= [4,6]([320,732] - [-12,12] + [-12,12]) -$$

$$[-1,1]([-122,122] - [-12,12] + [-12,12]) +$$

$$[-1,1]([-12,12] - [-72,72] + [-2,2]) -$$

$$[-1,1]([-12,12] - [-72,72] + [-2,2])$$

$$= [4,6][296,756] - [-1,1][-146,146] + [-1,1][-86,86] -$$

$$[-1,1][-86,86]$$

$$= [1184,4536] - [-146,146] + [-86,86] - [-86,86]$$

$$= [868,4854] \tag{2.5}$$

Berdasarkan Definisi 2.3 di peroleh hasil sebagai berikut :

$$|\boldsymbol{A}| = [4,6]([-6,-4]([-121,-81] - [-1,1]) - [-1,1]([-11,11] - [-1,1]) + [-1,1]([-1,1] - [-11,11])) -$$

$$[-1,1]([-1,1]([-121,-81] - [-1,1]) - [-1,1]([-11,11] - [-1,1]) + [-1,1]([-1,1] - [-11,11])) +$$

$$[-1,1]([-1,1]([-11,11] - [-1,1]) - [-6,-4]([-11,11] - [-1,1]) + [-1,1]([-1,1] - [-1,1])) -$$

$$[-1,1]([-1,1]([-1,1] - [-11,11]) - [-6,-4]([-1,1] - [-11,11]) + [-1,1]([-1,1] - [-1,1]))$$

$$= [4,6]([-6,-4][-122,-80] - [-1,1][-12,12] + [-1,1][-12,12]) -$$

$$[-1,1]([-1,1][-122,-80] - [-1,1][-12,12] + [-1,1][-12,12]) +$$

$$[-1,1]([-1,1][-12,12] - [-6,-4][-12,12] + [-1,1][0,0]) -$$

$$[-1,1]([-1,1][-12,12] - [-6,-4][-12,12] + [-1,1][0,0])$$

$= [4,6]([320\ ,690]) - [-1\ ,1]([-122\ ,122]) + [-1\ ,1]([-84\ ,84]) -$

$[-1\ ,1]([-84\ ,84])$

$= [4,6][296\ ,756] - [-1\ ,1][-122\ ,122] + [0\ ,0]$

$= [1280\ ,3770] - [-122\ ,122]$

$= [1158\ ,3892]$ (2.6)

Nilai determinan dari matriks interval $\boldsymbol{A}$ pada Contoh 2.10 yang diperoleh Egi Zulkarnain dalam makalahnya dengan menggunakan eliminasi gauss adalah $|\boldsymbol{A}| = [1027.29, 3972.71]$. (2.7)

Berdasarkan Persamaan (2.5) , (2.6) dan (2.7), dari tiga cara yang berbeda yaitu berdasarkan Definisi 2.2, Definisi 2.3 dan hasil yang diperoleh Egi Zulkarnain dalam makalahnya dengan matriks interval berukuran 4×4 yang sama menghasilkan nilai yang tidak sama.

Untuk mengetahui hubungan antara dua nilai determinan yang diperoleh dengan dua cara yang berbeda dapat dilakukan dengan mencari *midpoint* dari masing-masing nilai determinan tersebut.

(i) *Midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan eliminasi Gauss yang ditulis oleh Egi Zulkarnain dalam makalahnya adalah:
$m(\boldsymbol{A}) = \frac{1027.29+3972.71}{2} = 2500$ (2.8)

(ii) *Midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan ekspansi kofaktor yang ditulis oleh Egi Zulkarnain dalam makalahnya adalah: $m(\boldsymbol{A}) = \frac{868.29+4132}{2} = 2500$ (2.9)

(iii) *Midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan ekspansi kofaktor berdasarkan definisi 2.2 adalah $m(\boldsymbol{A}) = \frac{868+4854}{2} = 2861$ (2.10)

(iv) *Midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan ekspansi kofaktor berdasarkan definisi 2.3 adalah $m(\boldsymbol{A}) = \frac{1158+3892}{2} = 2525$. (2.11)

Berdasarkan Persamaan (2.8) , (2.9), (2.10) dan (2.11), dari empat cara yang berbeda, hasil yang diperoleh Egi Zulkarnain menggunakan eliminais Gauss dan ekspansi kofaktor dalam makalahnya menghasilkan *midpoint* yang sama. Namun bila dibandingkan dengan hasil yang diperoleh berdasarkan Definisi 2.2, dan Definisi 2.3 dengan matriks interval berukuran 4×4 yang sama, dari semua hasil empat persamaan tersebut menghasilkan *midpoint* yang tidak semua sama.

Langkah-langkah dalam menentukan determinan matriks persegi panjang tentu berbeda dengan matriks bujur sangkar. Pada tahun 1966, Radic M menemukan metode untuk mencari determinan matriks persegi panjang. Berikut akan di jelaskan mengenai determinan Radic.

2.4 Determinan Radic

Definisi 2.6 (Radic, 2005) Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ menjadi $m \times n$ matriks dengan *n* kolom $A_1, \cdots, A_n$ dan $m \leq n$. Determinan *A* didefinisikan sebagai :

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} (-1)^{r + j_1 + j_2 + \cdots + j_m} \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|,$$

Dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m$.

Contoh 2.11 :

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$|A| = (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+5)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+3+4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4)+(2+3+4+5)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 39 - 128 + 28 + 179 - 125$$

$$= -7$$

Contoh 2.12 :

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$|A| = (-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+6)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+5+6)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+4+5+6)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+3+4+5+6)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4+5)+(2+3+4+5+6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -826 + 786 + 466 - 490 + 536 - 194$$

$$= 278$$

Determinan persegi panjang dari matriks $m \times n$, dengan $m \leq n$, memiliki beberapa sifat umum. Sifat-sifat determinan matriks persegi panjang akan membantu kita dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan determinan persegi panjang agar lebih mudah. Berikut akan dijelaskan mengenai sifat-sifat determinan matriks persegi panjang.

2.5 Sifat-sifat Determinan Matriks Persegi Panjang

Determinan persegi panjang dari matriks $m \times n$, dengan $m \leq n$, memiliki beberapa sifat umum diantaranya :

Teorema 2.1 (Radic, 2005) Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ adalah matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 2$, maka

$$\begin{aligned} |A| = & |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - \cdots + (-1)^n A_n| \\ & + |A_2, A_3 - A_4 + \cdots + (-1)^n A_n| \\ & + \cdots \\ & + |A_{n-1}, A_n|. \end{aligned}$$

Contoh 2.13 :

Tentukan determinan dari matriks $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ & = -14 + 7 - 7 \\ & = -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 21 - 21 + 7 - 5 \\ & = 2 \end{aligned}$$

Teorema 2.2 (Makarewicz, 2014) Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ matriks $m \times n$, dengan m adalah jumlah baris dan n adalah jumlah kolom, $m \leq n$, maka

$$\begin{aligned} |A| = & \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} < n} (-1)^{r + j_1 + j_2 + \cdots + j_{m-1}} \\ & \times \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_{m-1}}, \sum_{k = j_{m-1}+1}^{n} (-1)^k A_k \right|. \end{aligned}$$

Contoh 2.14 : Tentukan determinan dari matriks $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Penyelesaian :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2+3)+(2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-6) + 6 - 20$$

$$= -8$$

Teorema 2.3 (Makarewicz, 2014) Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ matriks $m \times n$ dengan, $m \leq n$, maka

$$|A| = \sum_{1 \leq j_2 < \cdots < j_m < n} (-1)^{r + j_2 + \cdots + j_m} \left| \sum_{k=1}^{j_2 - 1} (-1)^k A_k, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|,$$

dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m$.

Contoh 2.15 :

Tentukan determinan dari matriks $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Penyelesaian :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(2+3)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(-1)^{(1+2+3)+(2+4)}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2+3)+(3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -10 + 16 - 14$$

$$= -8$$

Teorema 2.4 (Makarewicz, 2014) Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ matriks $m \times n$, $m \leq n$. Kemudian untuk setiap $p \in \{2,3, \cdots m-1\}$, maka

$$|A| = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_{p-1} \\ j_{p+1} < \cdots < j_m < n \\ j_{p+1} - j_{p-1} > 1}} (-1)^{r + j_1 + j_2 + \cdots + j_{p-1} + j_{p+1} + \cdots + j_m}$$

$$\times \left| A_{j_1}, \cdots, A_{j_{p-1}}, \sum_{k = j_{p-1}+1}^{j_{p+1}-1} (-1)^k A_k, A_{j_{p+1}}, \cdots, A_{j_m} \right|,$$

dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m$.

Contoh 2.16 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -10 - (-22) - 20$$

$$= -8$$