BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks dan jenis-jenis matriks, operasi matriks, kombinasi, koefisien binomial, *trace* matriks, serta beberapa definisi dan teorema yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987) Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Sebuah matriks dinotasikan dengan huruf besar seperti $A, B, X,$ atau Z dan lain sebagainya. Sebuah matriks A yang berukuran m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama disebut matriks bujur sangkar. Misalkan matriks A dengan m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut, dengan m dan n adalah bilangan bulat positif.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

atau juga dapat ditulis :

$$A = [a_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, m \,; j = 1, 2, \dots, n \tag{2.2}$$

Terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Matriks Bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama. Dengan kata lain matriks tersebut berordo $n \times n$.

2. Matriks Nol

Matriks nol adalah sebuah matriks yang seluruh elemen penyusunya merupakan bilangan nol. Matriks nol dilambangkan dengan 0.

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemen penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol.

4. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utama bernilai satu. Matriks identitas disimbolkan dengan $\boldsymbol{I}$.

5. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

a) Matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b) Matriks segitiga atas (*upper triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

6. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang sama dengan transposenya yaitu $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai dari i dan j. Bentuk matriks simetris untuk ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pada dasarnya operasi pada matriks sama dengan operasi matematika biasa tidak terkecuali untuk perkalian matriks. Perkalian matriks dilakukan untuk mengetahui *trace* matriks yang akan dihitung dengan cara mengalikan matriks sebanyak pangkat yang diinginkan. Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan perkalian matriks dan matriks yang berpangkat.

2.2 Perkalian Matriks

a. Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A oleh c.

Jika c adalah suatu bilangan skalar dan $A = a_{ij}$ maka matriks $cA = (ca_{ij})$ yaitu suatu matriks cA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan c. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan didepan atau dibelakang matriks. Misalnya $[C] = c[A] = [A]c$

Contoh 2.1 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari $2A$.

Penyelesaian:

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

maka $2A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

b. Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.3 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Contoh 2.2 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan $A \times B$.

Penyelesaian:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$,

maka $A \times B = \begin{bmatrix} 19 & 26 & 25 & 17 \\ 38 & 50 & 50 & 33 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi.

$A^0 = I$ dan $A^n = \underbrace{AA \; \dots \; A}_{n \, faktor} \; (n > 0)$.

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.4.

Teorema 2.1 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r serta s adalah bilangan bulat, maka

a. $A^r A^s = A^{r+s}$,

b. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai kombinasi serta koefisien-koefisien binomial.

2.3 Kombinasi

Definisi 2.5 (Rinaldi Munir, 2012) Kombinasi r elemen dan n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.. Secara umum rumus kombinasi adalah

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \,, \tag{2.3}$$

Diberikan Teorema yang berhubungan dengan Persamaan (2.3) sebagai berikut:

Teorema 2.2 (Sukirman, 2006) Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$, maka

$$C(k, r-1) + C(k,r) = C(k+1, r) \tag{2.4}$$

Bukti:

$$C(k,r-1)+C(k,r)=\frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!}+\frac{k!}{(k-r)!r!}$$

$$=\frac{k!r+k!(k-r+1)!}{(k+1-r)!r!}$$

$$=\frac{k!(r+k-r+1)}{(k+1-r)!r!}$$

$$=\frac{k!(k+1)}{(k+1-r)!r!}$$

$$=\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!}$$

$C(k,r-1)+C(k,r)=C(k+1,r), \blacksquare.$

2.4 Koefisien Binomial

Teorema 2.3 (Munir, 2012) Misalkan x dan y adalah peubah, dan n adalah bilangan bulat tak negatif. Maka :

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k. \tag{2.5}$$

$$=C(n,0)x^n y^0+C(n,1)x^{n-1}y^1+C(n,2)x^{n-2}y^2+\cdots+C(n,n)x^0y^n$$

Teorema binomial memberikan cara untuk menjabarkan bentuk perpangkatan $(x+y)^n$, yang dalam hal ini, n adalah bilangan bulat positif. Cara ini digunakan sebagai alternatif bagi pengguna segitiga pascal.

Diberikan contoh yang berkaitan dengan Persamaan (2.5).

Contoh 2.3: Buktikanlah bahwa $\sum_{r=0}^{3} C(3,r)x^{3-r}2^r=\sum_{r=1}^{4} C(3,r-1)x^{3-(r-1)}2^{r-1}$.

Penyelesaian:

$$\sum_{r=0}^{3} C(3,r)x^{3-r}2^r=C(3,0)x^{3-0}2^0+C(3,1)x^{3-1}2^1+C(3,2)x^{3-2}2^2+C(3,0)x^{3-3}2^3,$$

$$=x^3+3x^2 2+3x2^2+2^3,$$

$$=x^3+3x^2 2+3x2^2+8. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{4} C(3,r-1)x^{3-(r-1)}2^{r-1} &= C(3,1-1)x^{3-(1-1)}2^{1-1} + C(3,2-1)x^{3-(2-1)}2^{(2-1)} + C(3,3-1)x^{3-(3-1)}2^{(3-1)} + C(3,4-1)x^{3-(4-1)}2^{(4-1)},\\ &= C(3,0)x^{3-0}2^{0} + C(3,1)x^{3-1}2^{1} + C(3,2)x^{3-2}2^{2} + C(3,0)x^{3-3}2^{3},\\ &= x^3 + 3x^2 2 + 3x2^2 + 2^3,\\ &= x^3 + 3x^2 2 + 3x2^2 + 8, \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2.6) dengan Persamaan (2.7) terbukti bahwa $\sum_{r=0}^{3} C(3,r)x^{3-r}2^{r} = \sum_{r=1}^{4} C(3,r-1)x^{3-(r-1)}2^{r-1}$.

2.5 *Trace* Matriks

Definisi 2.6 (Gentle, 2007) Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ . \qquad (2.8)$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks 3×3 sebagai berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ hitunglah nilai *trace* dari matriks ?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33},\\ &= 3 + 4 + 3 = 10\ . \end{aligned}$$

Contoh 2.5 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 8 & 10 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 12 & 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$. Hitunglah nilai *trace* dari matriks B ?

Penyelesaian:

$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}$,

$= 6 + 7 + (-4) + 6$,

$= 15$.

Teorema berikut menjelaskan beberapa sifat-sifat *trace* matriks dari matriks bujursangkar.

Teorema 2.4 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah scalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,
ii. $tr(cA) = ctr(A)$,
iii. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$,
iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti: Diberikan matriks A dan B adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}. \tag{2.9}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}. \quad (2.10)$$

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$. (2.11)

Berdasarkan Persamaan (2.9) dan Persamaan (2.11) maka terbukti $tr(A) = tr(A^T)$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c\,tr(A)$, untuk c adalah sebarang sekalar. Diberikan:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \dots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \dots & ca_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ca_{n3} & \dots & ca_{nn} \end{bmatrix},$$

Sehingga di peroleh

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + ca_{33} + \cdots + ca_{nn}, \\ &= c(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}), \\ &= c\,tr(A). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Oleh karena itu terbukti $tr(A) = c\,tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ berdasarkan matriks A dan B, diperoleh:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{23}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn})\ . \qquad (2.13)$$

maka

$$tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}),$$

$$= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+a_{23}+b_{33}+\cdots+a_{nn}+b_{nn},$$

$$= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}).$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) dan Persamaan (2.10)maka terbukti bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. Dari matriks A dan B maka diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}a_{12}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+\cdots+a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+\cdots+a_{3n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{31}b_{1n}+a_{32}b_{2n}+\cdots+a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{n2}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \quad (2.14)$$

Selanjutnya untuk

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + \cdots + b_{3n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + \cdots + b_{3n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \quad (2.15)$$

$$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} + \cdots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn})$$

Berdasarkan Persamaan (2.15) maka terbukti bahwa $tr(AB) = tr(BA)$.

Diberikan contoh untuk menentukan *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat positif berpangkat n.

Contoh 2.6 Tentukan $tr(A^4)$ dan $tr(A^7)$ dari $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* dari matriks A diatas, maka matriks tersebut harus dikalikan sebanyak 7 kali, sebagai berikut:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -1 & -4 \\ -10 & 8 & -10 \\ -8 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 15 & -1 & -4 \\ -10 & 8 & -10 \\ -8 & -6 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -35 & 58 \\ -62 & 18 & -8 \\ 44 & 24 & -60 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} 11 & -35 & 58 \\ -62 & 18 & -8 \\ 44 & 24 & -60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 & -1 & -4 \\ -10 & 8 & -10 \\ -8 & -6 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 267 & 1 & -106 \\ -150 & 134 & -180 \\ -172 & -124 & 288 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 267 & 1 & -106 \\ -150 & 134 & -180 \\ -172 & -124 & 288 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 51 & -639 & 1118 \\ -1046 & 254 & -44 \\ 900 & 508 & -1256 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \times A = \begin{bmatrix} 51 & -639 & 1118 \\ -1046 & 254 & -44 \\ 900 & 508 & -1256 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4843 & 377 & -2562 \\ -2150 & 2302 & -3260 \\ -3644 & -2548 & 5960 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^6 \times A = \begin{bmatrix} 4843 & 377 & -2562 \\ -2150 & 2302 & -3260 \\ -3644 & -2548 & 5960 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1789 & -11871 & 21838 \\ -17878 & 3342 & 1028 \\ 18468 & 10700 & -26264 \end{bmatrix}$$

dari perkalian A diatas sehingga diperoleh :

$$tr(A^4) = 267 + 134 + 288 = 689$$

$tr(A^7) = (-1789) + 3342 + (-26264) = -24711$

2.6 *Trace* Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Fatonah (2017) dalam makalahnya berjudul "*Trace* matriks yang berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif", yang membahs tentang bentuk umum *trace* matriks yang berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan positif dengan entri-entri matriksnya bilangan real dan bilangan kompleks. Berikut adalah langkah-langkahnya untuk entri bilangan real:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
2. Menentukan $\det(A)$ dan $tr(A)$, yaitu:
$$\det(A) = 0 - ab = -ab. \tag{2.16}$$
dan
$$tr(A) = 0 + 0. \tag{2.17}$$
3. Menentukan bentuk umum A^n dengan n ganjil dan n genap.

Sebelum menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ berpangkat bilangan bulat positif, maka diperlukan bentuk umum untuk A^n berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$A^3 = A^2.A$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$A^4 = A^3.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$A^5 = A^4.A$

$$= \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$A^6 = A^5.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$A^7 = A^6.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^3b^3 \\ a^3b^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$A^8 = A^7.A$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$A^9 = A^8.A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^4b^4 \\ a^4b^4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$A^{10} = A^9.A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$A^{11} = A^{10}.A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^5b^5 \\ a^5b^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$A^{12} = A^{11}.A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^5b^6 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2.18) sampai (2.29) maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.30}$$

4. Membuktikan bentuk umum A^n dengan menggunakan induksi matematika.

Bentuk umum A^n pada Persamaan (2.30) dinyatakan dalam Teorema 2.5 sebagai berikut:

Teorema 2.5 : Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

$p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1 b^0 \\ a^0 b^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$A^{k+2} = (A^k A^2)$$

$$= (A^k . A . A)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ab\left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}\right) \\ ab\left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \text{untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \text{,untuk } n \text{ genap, dibuktikan sebagai berikut:}$$

1) Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A^2 = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & 0 \\ 0 & a^1 b^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \text{, benar.}$$

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$A^{k+2} = (A^k A^2)$$

$$= (A^k . A . A)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ab\left(a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right) & 0 \\ 0 & ab\left(a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right) \end{bmatrix}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.5 terbukti.

5) Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap.

Teorema 2.6 : Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti :

Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil sebagai brikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0\,. \qquad (2.31)$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka dapat diduga bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(-(-ab))^{\frac{n}{2}}\ .$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(A^n) = 2(-\det(A))^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}\ . \tag{2.32}$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.6 terbukti.

Berikut diberikan contoh yang berkaitan dengan Teorema 2.6 sebagai berikut:

Contoh 2.7 : Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A^5)$ dan $tr(A^8)$ dengan menggunakan Teorema 2.6.

Penyelesaian :

$$\det(A) = 0 - (5)(4) = -20$$

dan

$$tr(A) = 0 + 0 = 0$$

Sehingga menurut Teorema 2.6 diperoleh:

$$tr(A^5) = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} = 0.$$

Untuk $tr(A^8)$ menurut Teorema 2.6 diperoleh:

$$tr(A^8) = 2(-1)^{\frac{8}{2}}(\det(A))^{\frac{8}{2}},$$

$$= 2(-20)^4,$$

$$= 320.000.$$

2.7 Induksi Matematika

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut : Misalkan $p(n)$ adalah menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan untuk $p(n+1)$ juga benar, asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Contoh 2.8 Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.

Penyelesaian:

Andaikan bahwa $p(n)$ menyatakan proposisi bahwa untuk $n \geq 1$, jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)}{2}$, yaitu $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kebenaran proposisi ini harus dibuktikan dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

1. Basis induksi : $p(1)$ benar, karena untuk $\frac{n(n+1)}{2}$ diperoleh

$$p(1) = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$= 1$$

2. Langkah induksi: misalkan $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar (hipotesis induksi), maka akan ditunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar,yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = (n + 1)\,[(n + 1) + 1]/2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n + 1) \\ &= [n(n + 1)]/2 \ + (n + 1) \\ &= [n^2 + n/2] + (n + 1) \\ &= [n^2 + n/2] + [(2n + 2)/2] \\ &= (n^2 + 3n + 2)\ \ /2 \\ &= (n + 1)(n + 2)/2 \\ &= (n + 1)[(n + 1) + 1]/2 \end{aligned}$$

Karena langkah (1) dan (2) telah terbukti benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.