

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley (1821-1895) pada tahun 1857. Menurut Ruminta (2009), matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara dua tanda kurung, yaitu () dan [].

Salah satu jenis matriks adalah matriks Toeplitz. Menurut Gray (2006), matriks Toeplitz adalah matriks $n \times n$ dengan $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n - 1]$ dimana $t_{k,j} = t_{k-j}$, yaitu dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Salah satu permasalahan matriks, yaitu menentukan polinomial karakteristik. Polinomial karakteristik dari suatu matriks A_n didefinisikan dengan

$$\Delta_{A_n}(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Istilah “*determinant*” pertama kali digunakan oleh Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dalam *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), tetapi dalam pembahasan bentuk-bentuk kuadrat dengan menggunakan determinan. Pierre Frederic Sarrus (1798-1861) adalah seorang matematikawan Perancis yang menemukan aturan mnemonic untuk memecahkan determinan dari sebuah matriks berorde 3×3 yang dinamakan skema Sarrus, yang memberikan metode mudah untuk diingat (*easy-*

to-remember) dalam mengerjakan determinan dari sebuah matriks berorde 3×3 (Endri, 2013).

Banyak cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan dari suatu matriks, menurut Ruminta (2009) diantaranya dengan menggunakan metode Sarrus, metode ekspansi kofaktor, metode chio, metode eliminasi Gauss (reduksi baris), dan metode dekomposisi matriks. Cara lainnya dengan aturan segitiga dan metode kondensasi Dogson. Aturan segitiga hanya bisa digunakan untuk menghitung determinan matriks orde 3×3 , metode Sarrus digunakan untuk menghitung determinan matriks orde 2×2 dan 3×3 , sedangkan metode ekspansi kofaktor, metode chio dimana $a_{11} \neq 0$, metode eliminasi Gauss, metode dekomposisi matriks, dan metode kondensasi Dogson bisa digunakan untuk menentukan determinan matriks orde $n \times n$.

Penelitian tentang matriks Toeplitz telah banyak diteliti sebelumnya, diantaranya pada tahun 1998, Agustini melakukan penelitian tentang matriks Toeplitz yang ditulis dalam skripsinya dengan judul “Invers Matriks Pita Toeplitz dengan Metode Jacobi”. Tahun 2014, Bakti Siregar juga melakukan penelitian tentang matriks Toeplitz dalam jurnalnya yang berjudul “Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin” yang mempunyai bentuk matriks sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Tahun 2014, Rizkiwati juga melakukan penelitian tentang matriks Toeplitz yang ditulis dalam skripsinya dengan judul “Kelas-kelas Matriks Toeplitz Normal Tasrif”. Tahun 2015, Hardini juga meneliti tentang matriks Toeplitz yang ditulis dalam skripsinya dengan judul “Perhitungan Nilai Eigen Terkecil dari Matriks Toeplitz Simetrik Real dan Definit-Positif dengan Metode *Single Newton*”. Selanjutnya tahun 2015, Fatmasari dan Puad juga meneliti tentang matriks

Toeplitz dengan judul "Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal" dan "Kajian Determinan dan Invers Suatu Matriks Toeplitz Sirkulan Berordo $n(n \geq 2)$ serta Aplikasinya dalam Analisis Input-Output".

Selanjutnya, penelitian tentang polinomial karakteristik diantaranya pada tahun 2009, Wardani dan Budayasa meneliti tentang polinomial karakteristik dengan judul "Polinomial Karakteristik Beberapa Kelas Graf Berarah". Pada tahun 2013, Ikawati juga meneliti tentang polinomial karakteristik yang ditulis dalam skripsinya yang berjudul "Persamaan Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency, Matriks Laplace, dan Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ ". Pada tahun 2017, Maryatun dkk juga meneliti tentang polinomial karakteristik dalam jurnalnya dengan judul "Polinomial Karakteristik Matriks dalam Aljabar Maks-Plus".

Sedangkan penelitian tentang polinomial karakteristik matriks Toeplitz belum pernah diteliti sebelumnya. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti tentang menentukan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Toeplitz dari Persamaan (1.3). Berdasarkan latar belakang di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "**Bentuk Umum Polinomial Karakteristik Matriks Toeplitz**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah "Bagaimana menentukan bentuk umum polinomial karakteristik dari matriks Toeplitz?".

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi masalah dengan cara menentukan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Toeplitz orde $1 \leq n \leq 12$ dari Persamaan (1.3) dimana $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Polinomial karakteristik ditentukan menggunakan determinan matriks, maka untuk mencari determinannya digunakan metode ekspansi kofaktor.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum polinomial karakteristik suatu matriks Toeplitz A_n dengan $1 \leq n \leq 12$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

- Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika terutama tentang matriks Toeplitz, serta dapat menambah sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan
- Penulis dapat mengetahui lebih banyak materi tentang matriks, khususnya tentang menentukan polinomial karakteristik matriks Toeplitz.
- Dapat memberikan kontribusi dalam dunia pengetahuan khususnya dalam bidang matematika murni.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari lima bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan dasar-dasar penulisan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Pada bab ini menjelaskan tentang teori-teori tentang matriks, jenis-jenis matriks, definisi matriks Toeplitz, determinan matriks, polinomial karakteristik, serta metode ekspansi kofaktor.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk mendapatkan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Toeplitz.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB IV Pembahasan

Bab ini membahas tentang pembahasan dan pemaparan untuk mendapatkan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Toeplitz, yaitu menentukan polinomial karakteristik matriks Toeplitz orde $1 \leq n \leq 12$ dan dikelompokkan kedalam tabel. Kemudian, diduga bentuk umumnya serta dibuktikan menggunakan substitusi untuk matriks Toeplitz orde $1 \leq n \leq 12$ juga dibahas dalam bentuk aplikasi.

BAB V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan pemaparan pada Bab IV serta saran penulis bagi pembaca atau peneliti selanjutnya yang ingin meneliti lebih lanjut tentang polinomial karakteristik matriks Toeplitz.