BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori ini terdiri dari beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam menentukan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Toeplitz.

2.1 Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Definisi 2.1 (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara dua tanda kurung, yaitu $(\ )$ dan $[\ ]$.

Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut entri dari matriks. Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya (Anton dkk, 2004). Matriks dilambangkan dengan huruf besar, sedangkan entri (elemen matriks) dilambangkan dengan huruf kecil. Secara umum, sebuah matriks A berorde $m \times n$ dapat ditulis seperti

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

atau dengan penulisan yang lebih singkat : $A = [a_{ij}]$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Indeks pertama (i) menyatakan baris ke$-i$ dan indeks kedua (j) menyatakan kolom ke$-\ j$ (‘Imrona, 2013).

2.1.2 Jenis-jenis Matriks

Menurut Mahmud ‘Imrona (2013), ada beberapa jenis matriks yang penting, antara lain:

1) Matriks Bujur sangkar

Matriks bujur sangkar yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Pada matriks bujur sangkar dikenal istilah diagonal utama yaitu entri-entri yang mempunyai nomor baris sama dengan nomor kolom, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks di atas mempunyai orde n, dan ditulis A_n, sedangkan entri yang terletak pada diagonal utamanya adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

2) Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol, sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3) Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol, sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4) Matriks Diagonal

Matriks diagonal (*diagonal matrix*) adalah suatu matriks bujur sangkar yang semua entri di luar diagonal utama nilainya nol dan paling tidak terdapat satu elemen pada diagonal utama yang tidak nol $(\neq 0)$. Matriks diagonal dinotasikan dengan D (Kariadinata, 2013), sebagai berikut:

$$D_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

5) Matriks Satuan (Matriks Identitas)

Matriks satuan yaitu matriks diagonal yang entri-entri pada diagonal utamanya adalah bilangan satu dan entri-entri lainnya adalah bilangan nol. Matriks satuan ini dilambangkan dengan I_n, dimana n adalah orde dari matriks tersebut, sebagai berikut:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

6) Matriks Skalar

Matriks skalar yaitu matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utamanya bernilai sama, tetapi tidak nol, atau $c \neq 0$, sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ c = a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn}$$

7) Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua entrinya mempunyai nilai nol. Biasanya dinotasikan dengan O, dibaca "matriks nol" (Kariadinata, 2013), seperti berikut:

$$O_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

8) Matriks Invers

Matriks bujur sangkar A disebut mempunyai invers jika terdapat matriks B yang sedemikian rupa sehingga memenuhi $BA = AB = 1$. Untuk perlambangan, invers matriks A biasanya dinyatakan oleh A^{-1} baca : A pangkat -1 (minus 1). Untuk matriks berorde 2×2 rumus pencariannya adalah seperti di bawah ini.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Untuk orde yang lain, misalnya, 3×3 dan seterusnya, metode pencarian invers matriks dapat menggunakan matriks elementer.

9) Matriks Simetris

Matriks simetris (*symmetric matrix*) adalah suatu matriks yang memiliki sebarang diagonal utama, tetapi entri-entri yang "bercermin" terhadap diagonal utama adalah sama (Kariadinata, 2013). Matriks bujur sangkar disebut matriks simetris jika $A = A^T$.

10) Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Gray, 2006) Matriks Toeplitz adalah matriks $n \times n$ dengan $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0, 1, \ldots, n-1]$ dimana $t_{k,j} = t_{k-j}$, yaitu dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Salah satu kasus khusus matriks Toeplitz adalah matriks *Circulant* dan matriks Hermitian. Apabila setiap baris dari matriks Toeplitz adalah pergeseran siklik ke kanan dari baris di atasnya sehingga $t_k = t_{-(n-k)} = t_{k-n}$ untuk $k = 1, 2, \dots, n-1$ sebagai berikut:

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} & & \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-1} & t_{-2} & & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

maka matriks di atas disebut matriks *Circulant*. Menurut Anton dan Rorres (2006), sebuah matriks bujur sangkar A yang entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks Hermitian jika $A = A^*$. Matriks Hermitian merupakan bentuk lain dari matriks simetris dengan entri bilangan riil. Pada matriks dengan entri riil, matriks simetris didefinisikan dengan $A = A^T$, sama halnya dengan matriks Hermitian yaitu $A = A^*$, dimana A^* merupakan transpose konjugat dari A.

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.3 (Anton, 2010) Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinyatakan dengan $\det$, dan kita mendefinisikan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan A.

Teorema 2.1 (Anton, 1997) Determinan matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan, yakni untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad \text{(ekspansi kofaktor di sepanjang baris ke-}i\text{)}$$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad \text{(ekspansi kofaktor di sepanjang kolom ke-}j\text{)}$$

Contoh 2.1

Diberikan matriks Toeplitz orde 4×4 sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

Hitunglah determinan matriks tersebut!

Penyelesaian:

Untuk mencari determinan matriks di atas, digunakan metode ekspansi kofaktor sebagai berikut:

1. Matriks diekspansi sepanjang baris pertama dengan $\det(A_4) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$, sehingga

$$\det(A_4) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1}(0)\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}(x)\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}(x)\begin{bmatrix} x & 0 & x \\ x & x & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+4}(x)\begin{bmatrix} x & 0 & x \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$= 0(2x^3) - x(x^3) + x(-x^3) - x(x^3)$$

$$= -3x^4$$

2. Matriks diekspansi sepanjang kolom pertama dengan $\det(A_4) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$, sehingga

$$\det(A_4) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1}(0)\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1}(x)\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}(x)\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{4+1}(x)\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$$

$$= 0(2x^3) - x(x^3) + x(-x^3) - x(x^3)$$

$$= -3x^4$$

Jadi, diperoleh determinan dari matriks $A_4 = -3x^4$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa apabila matriks diekspansi sepanjang baris pertama maupun kolom pertama, akan memberikan hasil yang sama.

2.3 Polinomial Karakteristik

Definisi 2.4 (Banjar, 2012) Jika dimisalkan A_n adalah suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka matriks karakteristik dari A_n adalah matriks $A_n - \lambda I_n$ dengan I_n adalah matriks identitas berukuran n dan λ adalah variabel bebas. Matriks karakteristik dari A_n dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(A_n - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Dengan mencari determinan dari matriks karakteristik dari A_n, diperoleh suatu polinomial, yaitu:

$$\Delta_{A_n}(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n) \tag{2.4}$$

Polinomial $\Delta_{A_n}(\lambda)$ adalah polinomial yang sering disebut sebagai polinomial karakteristik dari A_n.

Contoh 2.2

Diberikan matriks Toeplitz orde 4×4 sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$$

Hitunglah polinomial karakteristik matriks di atas!

Penyelesaian:

Untuk mencari polinomial karakteristik, digunakan rumus $\Delta_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda I_4)$ sehingga

$$\Delta_{A_4}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & x & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & x & x & x \\ x & -\lambda & x & x \\ x & x & -\lambda & x \\ x & x & x & -\lambda \end{bmatrix} \right)$$

Selanjutnya, matriks diekspansi sepanjang kolom pertama, diperoleh

$$= (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{bmatrix} -\lambda & x & x \\ x & -\lambda & x \\ x & x & -\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{2+1}(x) \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & -\lambda & x \\ x & x & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+1}(x) \begin{bmatrix} -\lambda & x & x \\ x & x & x \\ x & x & -\lambda \end{bmatrix} + (-1)^{4+1}(x) \begin{bmatrix} -\lambda & x & x \\ x & -\lambda & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda x^2 + 2x^3) - (x)(\lambda^2 x + 2\lambda x^2 + x^3)$$

$$+ (x)(-\lambda^2 x - 2\lambda x^2 - x^3) - (x)(\lambda^2 x + 2\lambda x^2 + x^3)$$

$$= \lambda^4 - 6\lambda^2 x^2 - 8\lambda x^3 - 3x^4$$

Jadi, polinomial karakteristik dari matriks $A_4 = \lambda^4 - 6\lambda^2 x^2 - 8\lambda x^3 - 3x^4$.