BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Narkoba

Narkoba merupakan singkatan dari narkotika, psikotropika dan bahan adiktif lainnya. Menurut Undang-Undang Republik Indonesia (UU RI) nomor 35 tahun 2009, narkotika adalah zat atau obat yang berasal dari tanaman atau bukan tanaman, baik sintetis maupun semisintetis, yang dapat menyebabkan penurunan atau perubahan kesadaran, mengurangi hingga menghilangkan rasa nyeri, dan dapat menimbulkan ketergantungan bagi pemakainya. Contoh: opium, ganja, kokain, morfin dan heroin.

Menurut UU RI nomor 5 tahun 1997, psikotropika adalah zat atau obat alamiah maupun sintetis bukan narkotika, yang berkhasiat psikoaktif melalui pengaruh selektif pada susunan saraf pusat yang menyebabkan perubahan khas pada aktifitas mental dan perilaku. Contoh: ekstasi, amphetamine, pentobarbital, dan diazepam.

Zat adiktif lainnya adalah zat yang dapat mempengaruhi pikiran, suasana hati dan perilaku seseorang, namun tidak tergolong dalam narkotika maupun psikotropika, serta berpotensi menimbulkan ketergantungan. Jenis ini tidak tercantum dalam undang-undang. Contoh: kelompok minuman alkohol, nikotin, kafein, inhalansia dan solven.

Dalam sejarah, sari bunga opion pertama kali ditemukan di Samaria pada tahun 2000 SM (Sebelum Masehi) dan kemudian lebih dikenal dengan nama Opium (candu yang berasal dari tanaman (*Papaver somniferium*)). Bunga ini tumbuh subur di daerah dataran tinggi diatas ketinggian 500 meter diatas permukaan laut dan telah tersebar ke daerah India, Cina, termasuk Indonesia.

Kemudian pada tahun 1806, dokter dari Wetphalia bernama Friederich Wilhelim menemukan modifikasi candu yang dicampur amoniak yang dikenal dengan Morphin (diambil dari dewa mimpi Yunani yang bernama Morphius). Lalu pada tahun 1856 waktu pecah perang saudara di Amerika Serikat, Morphin ini digunakan untuk penghilang rasa sakit akibat luka-luka perang.

Sehingga pada tahun 1874 seorang ahli kimia bernama Alder Wright dari London merebus cairan Morphin dengan asam anhindrat (cairan asam yang ada pada jenis jamur). Campuran ini membawa efek ketika diuji coba kepada anjing. Anjing tersebut memberikan reaksi yaitu tiarap, ketakutan, mengantuk, dan muntah-muntah. Pada tahun 1898 pabrik obat "Bayer" memproduksi obat tersebut dengan nama Heroin, sebagai obat resmi penghilang sakit (S. Amdinat, 2005).

Melihat dari kemajuan teknologi saat ini, banyak jenis candu yang sudah dijual dalam bentuk obat-obatan setelah diberi campuran-campuran khusus dan jenisnya pun bertambah banyak seperti extacsy, putaw dan lain-lain sehingga menyebar ke berbagai lapisan masyarakat.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang memuat turunan atau diferensial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut Persamaan Diferensial. Pada umumnya terdapat dua jenis persamaan yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah satu persamaan yang hanya melibatkan turunan biasa bagi satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas tunggal. Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah satu persamaan yang melibatkan turunan parsial bagi satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial linier orde n dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

Sedangkan persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan yang tidak dalam bentuk Persamaan (2.1) (Sugiyarto, 2015).

Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial, maka akan membentuk suatu sistem persamaan diferensial. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde pertama yang nonautonomous sebagai berikut (Perko, 2001):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Persamaan diferensial (2.2) bisa ditulis sebagai persamaan vektor dengan vektor kolom $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n]^T$ dan $\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]^T$. Sistem persamaan diferensial (2.2) dapat ditulis sebagai:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}). \tag{2.3}$$

Solusi dari (2.3) adalah sekumpulan fungsi terdiferensial dari n pada suatu interval $a < t < b$

$$x_1 = h_1(t), \ldots, x_n = h_n(t),$$

yang memenuhi (2.3) pada interval $a < t < b$.

Sistem persamaan diferensial (2.2) adalah sistem linear jika fungsi linear dalam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}, \tag{2.5}$$

Dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11}(\boldsymbol{t}) & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}(\boldsymbol{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}(\boldsymbol{t}) & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn}(\boldsymbol{t}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{t}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{t}) \end{bmatrix}$$

Sistem disebut homogen jika $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$, sehingga

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

Jika $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$, maka Sistem (2.5) disebut nonhomogen.

2.3 Titik Tetap dan Analisa Kestabilan Titik Tetap

Definisi 2.1 (Perko, 2001) Titik $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$ disebut titik keseimbangan (titik *tetap*) dari suatu sistem persamaan diferensial yaitu:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.7}$$

jika $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$.

Terdapat dua jenis titik tetap dalam model matematika penyebaran pemakai narkoba, yaitu titik tetap tak endemik pemakai narkoba dan titik tetap endemik pemakai narkoba. Titik tetap tak endemik pemakai narkoba terjadi jika dalam suatu populasi tidak terdapat individu pemakai narkoba dan titik tetap endemik pemakai narkoba yaitu keadaan dalam populasi tersebut selalu terdapat individu pemakai narkoba.

Sedangkan kestabilan titik tetap dapat dijelaskan menggunakan defenisi berikut ini:

Defenisi 2.2 (Perko, 2001) Titik keseimbangan (titik tetap) $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$ dari Sistem (2.7) dikatakan:

a. Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk solusi $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ maka berakibat $\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $\boldsymbol{t} \le \boldsymbol{t}_0$.

b. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \delta_0$ berakibat $\lim_{\boldsymbol{t}\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}^*$.

c. Tidak stabil jika titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$ tak memenuhi (a).

Untuk menguji apakah titik tetap stabil atau tidak, maka digunakan kriteria nilai eigen dan kriteria Routh-Hurwitz.

Definisi 2.3 (Anton, 2004) Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{R}^n$ disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, berlaku:

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{2.8}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$, maka Persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Ix}$$

atau secara ekuivalen,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.9}$$

dimana I merupakan matriks identitas. Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari Persamaan (2.9). Persamaan (2.9) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika :

$$\mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) disebut parsamaan karakteristik matriks $\boldsymbol{A}$.

Kestabilan titik tetap $\boldsymbol{x}^*$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

Teorema 2.1 (M. Braun, 1983) Diberikan persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$ dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik tetap $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil asimtotik, jika dan hanya jika $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1,2,...,k$.

b. Titik tetap $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil, jika dan hanya jika $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2,...,k$.

c. Titik tetap $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1,2,...,k$.

Contoh 2.1: Diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = -6x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_2$$

Tentukan titik tetap dan kestabilan dari sistem tersebut:

Penyelesaian:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$
$$-6x_1^* = 0$$
$$x_1^* = 0$$

dan

$$\frac{dx_2}{dt} = 0$$
$$-4x_2^* = 0$$
$$x_2^* = 0$$

Didapat titik tetapnya $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$. Untuk mendapatkan kestabilan dari titik tetap $(0,0)$ dapat ditentukan dengan menghitung nilai eigen tersebut.

Contoh 2.2: Diketahui sistem persamaan differensial dimana:

$$\frac{dx_1}{dt} = -6x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_2$$

Didapat matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai eigen dari matriks diatas:

$$\det(\lambda I - A)x = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+6 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}\right)=0$$

Sehingga didapatkan nilai eigennya sebagai berikut:

$$(\lambda+6)(\lambda+4)-0=0$$
$$\lambda^2+4\lambda+6\lambda+24-0=0$$
$$\lambda^2+10\lambda+24=0$$
$$\lambda_1=-6 \text{ dan } \lambda_2=-4$$

Maka dari titik tetap $(x_1^*, x_2^*)=(0,0)$, didapat kestabilan nilai eigen stabil asimtotik karena nilai $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})<0.$

Apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit ditentukan maka digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Karena kriteria kestabilan Routh-Hurwitz ini tidak melihat tanda bagian real dari nilai eigen atau akar-akar persamaan karakteristik secara langsung melainkan melihat koefisien dari persamaan karakteristik.

Teorema 2.2 (Allen, 2007) Jika diberikan persamaan karakteristik, yaitu:

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n,$$

dimana a_j adalah koefisien yang merupakan bilangan real, $j=1,2,\ldots,n$. Diperoleh matriks Hurwitz menggunakan koefisen a_j dari persamaan polinomial karakteristik yang didefinisikan sebagai berikut :

$$H_1=(a_1), \qquad H_2=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad H_3=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

dan

$$H_n=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix}$$

dimana $a_j=0$ jika $j>n$.

Akar-akar dari persamaan karakteristik polinomial $P(\lambda)$ adalah negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif :

$$\det(H_j) > 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

Ketika $n = 2$ kriteria Routh-Hurwitz untuk $\det(H_1) = a_1 > 0,$ dan

$$\det(H_2) = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0 \text{ atau } a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk polinomial berderajat $n = 2,3,4$ dan 5 dinyatakan bahwa titik tetap stabil, jika :

$n = 2 : a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$

$n = 3 : a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > 0$

$n = 4 : a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

$n = 5 : a_1 > 0, i = 1,2,3,4,5, a_1, a_2, a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ dan

$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2.$

Contoh 2.3:

Selidiki apakah persamaan karakteristik di bawah ini memenuhi kriteria Routh-Hurwitz ?

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Berdasarkan persamaan tersebut, maka didapat $a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1$. Kemudian nilai j dari persamaan karakteristik di atas adalah 3, sehingga matriks Hurwitznya hanya sampai a_5. Akan dibuktikan semua determinan matriks Hurwitznya adalah positif.

Untuk $H_1 = (a_1), \det(H_1) = |4| = 4 > 0$.

Untuk $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \det(H_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$.

Untuk $H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \det(H_3) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 > 0$.

Karena, semua determinan matriks Hurwitznya positif, maka persamaan karakteristik di atas memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan dapat dinyatakan stabil.

Untuk suatu sistem persamaan diferensial nonlinear, analisis kestabilan dilakukan melalui pelinearan. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x),\ x \in R^n . \tag{2.11}$$

Dengan mengggunakan ekspansi Taylor untuk suatu titik tetap x^*, maka Sistem (2.11) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = J(x) + \varphi(x), \tag{2.12}$$

dengan J adalah matriks Jacobi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$$
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

dan $\varphi(x)$ adalah suku berorde tinggi yang bersifat $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$, dengan $J(x)$ pada Sistem (2.12) disebut pelinearan dari Sistem (2.11) yang didapat dalam bentuk $\dot{x} = J(x)$.

Untuk menguji kestabilan titik tetap sistem persamaan diferensial nonlinear dapat menggunakan kriteria nilai eigen atau kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.3 (Perko, 2001) Selanjutnya akan diberikan teorema tentang sifat kestabilan lokal dari Sistem (2.13) yang ditinjau dari nilai eigen Matriks Jacobian $J(x)$.

a. Jika Matriks Jacobian $J(x)$ mempunyai $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1,2,...,n$ maka x dari Sistem (2.2) stabil asimtotik lokal.

b. Jika terdapat nilai eigen Matriks Jacobian $J(x)$ yang mempunyai bagian real positif, maka titik tetap x dari Sistem (2.2) tidak stabil.

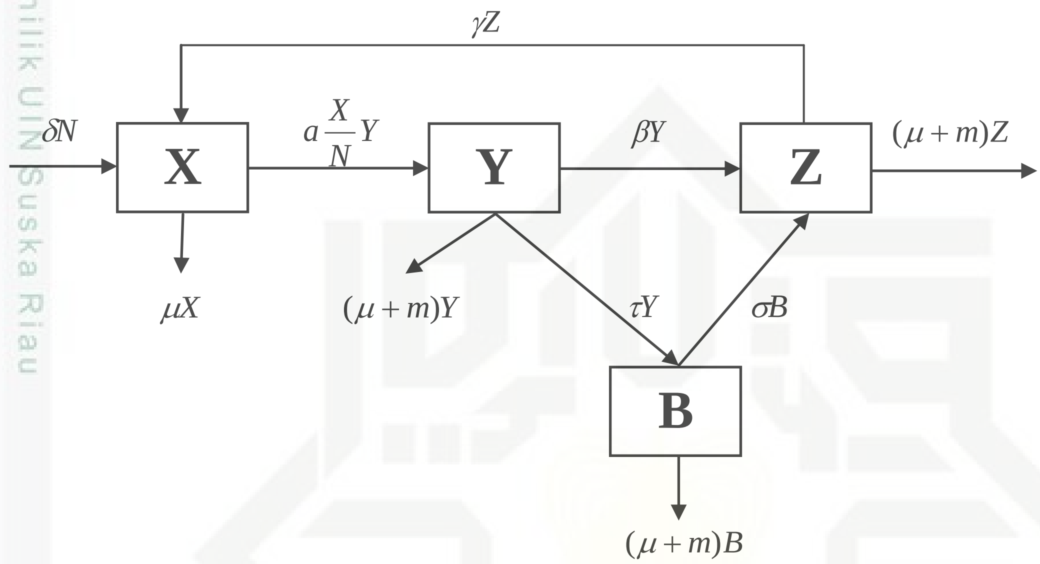
2.4 Model Matematika Jumlah Pemakai Narkoba dengan Program Rehabilitasi

Populasi pada model ini dibagi menjadi 4 kelompok yaitu kelompok individu rentan untuk memakai narkoba (X), kelompok individu pemakai narkoba (Y), kelompok individu yang direhabilitasi (B) dan kelompok individu yang berhenti memakai narkoba (Z).

Untuk *Model Matematika Jumlah Pemakai Narkoba dengan Program Rehabilitasi* diperlukan asumsi sebagai berikut:

1. Populasi bersifat tertutup, yaitu dalam populasi tidak terjadi proses migrasi.
2. Jumlah populasi konstan yaitu jumlah pertambahan populasi sama dengan jumlah kematian.
3. Individu yang berusia 6 tahun masuk ke kelompok rentan dengan laju recruitment sebesar δ.
4. Laju kematian alami pada masing-masing populasi sebesar μ.
5. Interaksi antara individu rentan memakai narkoba menjadi individu pemakai narkoba dinyatakan dengan laju $a\frac{X}{N}Y$.
6. Laju kematian yang disebabkan oleh narkoba sebesar m.
7. Laju individu pemakai narkoba menjadi individu yang berhenti memakai narkoba sebesar β.
8. Laju individu pemakai narkoba menjadi individu yang direhabilitasi sebesar τ.
9. Laju individu yang direhabilitasi menjadi individu yang berhenti memakai narkoba sebesar σ.
10. Laju individu yang berhenti memakai narkoba menjadi individu rentan untuk memakai narkoba kembali sebesar γ.

Berdasarkan asumsi tersebut, maka diperoleh diagram alir dari *Model Matematika Jumlah Pemakai Narkoba dengan Program Rehabilitasi* oleh makalah E. Yuliza, dkk, (2014) sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Alir Model Matematika Jumlah Pemakai Narkoba dengan Program Rehabilitasi

Berdasarkan diagram alir di atas maka diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= -a\frac{X}{N}Y - \mu X + \gamma Z + \delta N \\
\frac{dY}{dt} &= a\frac{X}{N}Y - (\beta + \mu + m + \tau)Y \\
\frac{dB}{dt} &= \tau Y - (\mu + m + \sigma)B \\
\frac{dZ}{dt} &= \beta Y + \sigma B - (\mu + m + \gamma)Z
\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Misalkan:

$D_1 = \beta + \mu + m + \tau$

$D_2 = \mu + m + \sigma$

$D_3 = \mu + m + \gamma$

Jadi Sistem (2.14) dapat ditulis menjadi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= -a\frac{X}{N}Y - \mu X + \gamma Z + \delta N \\
\frac{dY}{dt} &= a\frac{X}{N}Y - D_1 Y \\
\frac{dB}{dt} &= \tau Y - D_2 B \\
\frac{dZ}{dt} &= \beta Y + \sigma B - D_3 Z
\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$