BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II ini penulis akan menjelaskan beberapa teori yang berkaitan tentang matriks dan jenis-jenis matriks, perkalian matriks, kombinasi, teorema binomial, *trace* matriks, serta beberapa definisi dan teorema.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Pada subbab ini menjelaskan tentang pengertian matriks dan jenis-jenis matriks. Adapun pengertian dari suatu matriks dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Anton & Rorres, 2004) Suatu matriks *(matrix)* adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Berikut ini diberikan beberapa jenis matriks, diantaranya:

1. Matriks Bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama. Dengan kata lain matriks tersebut berordo $n \times n$.

2. Matriks Nol

Matriks nol adalah sebuah matriks yang seluruh elemen penyusunnya merupakan bilangan nol. Matriks nol dilambangkan dengan 0.

3. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utama bernilai satu. Matriks identitas disimbolkan dengan $\boldsymbol{I}$.

4. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen-elemen penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol.

5. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

a) Matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b) Matriks segitiga atas (*upper triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

6. Matriks Toeplitz

Menurut Robert (2006), matriks Toeplitz adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dengan $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$ dimana $t_{k,j} = t_{k-j}$. Bentuk umum dari matriks Toeplitz adalah sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \ddots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \ddots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Salah satu jenis dari matriks Toeplitz adalah matriks Toeplitz tridiagonal (Fuzhen Zhang, 2011) berorde n

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & a \end{bmatrix}$$

dengan $b \neq 0$ dan $c \neq 0, \forall a, b, c \in \mathcal{R}$.

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Anton & Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali *(product)* AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$, dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Teorema 2.1 (Larson, 2013) Jika A, B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini benar.

a) $(AB)C = A(BC)$, (hukum asosiatif pada perkalian matriks)
b) $A(B + C) = AB + AC$, (hukum distributif kiri)
c) $(A + B)C = AC + BC$, (hukum distributif kanan)
d) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Definisi 2.3 (Anton & Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}} \quad (n > 0)$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.3.

Teorema 2.2 (Anton & Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar dan r dan s adalah integer-integer, maka

$A^r A^s = A^{r+s}, \qquad (A^r)^s = A^{rs}$

2.3 Kombinasi

Definisi 2.4 (Rinaldi Munir, 2010) Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen. Secara umum rumus kombinasi adalah

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}\,, \tag{2.1}$$

Rumus umum permutasi adalah

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1) dapat dibuktikan dengan cara membentuk permutasi r dari n elemen. Mula-mula hitung kombinasi r, yaitu $C(n,r)$, kemudian urutkan elemen-elemen didalam setiap kombinasi r. Pengurutan ini dapat dilakukan dengan $P(r,r)$ cara. Dengan demikian, permutasi r dari n elemen adalah

$$P(n,r) = C(n,r)\,P(r,r)\,. \tag{2.3}$$

Dari Persamaan (2.2) kita peroleh:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\,. \tag{2.4}$$

2.4 Teorema Binomial

Teorema 2.3 (Sukirman, 2006) Jika k dan r adalah bilangan-bilangan asli dengan $k > r$, maka

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Bukti:

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \frac{k!}{(k-r+1)!\,(r-1)!} + \frac{k!}{(k-r)!\,r!}$$

$$= \frac{k!\,r + k!\,(k-r+1)}{(k+1-r)!\,r!}$$

$$= \frac{k!\,(r+k-r+1)}{(k+1-r)!\,r!}$$

$$= \frac{k!\,(k+1)}{(k+1-r)!\,r!}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$$

Jadi, terbukti $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$.

2.5 *Trace* Matriks

Definisi 2.5 (Anton & Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A (*trace of* A), yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujur sangkar.

Contoh 2.1 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ hitunglah nilai *trace* dari matriks A?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 13 + 13 + 10 \\ &= 33 \end{aligned}$$

Teorema 2.4 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

a. $tr(A) = tr(A^T)$
b. $tr(cA) = c \cdot tr(A)$
c. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
d. $tr(AB) = tr(BA)$

Bukti:

Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (2.5)

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(B) = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}$ (2.6)

a. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (2.7)

Berdasarkan Persamaan (2.5) dan Persamaan (2.7) maka terbukti $tr(A) = tr(A^T)$.

b. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c \cdot tr(A)$, untuk c adalah sebarang skalar, diperoleh:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$tr(cA) = ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn}$ (2.8)

maka

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \\ &= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \\ &= c \cdot tr(A) \end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $tr(cA) = c \cdot tr(A)$.

c. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B diperoleh:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(A+B)=a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn} \qquad (2.9)$$

maka

$$\begin{aligned} tr(A+B)&=a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn} \\ &=(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}) \\ &=tr(A)+tr(B) \end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

d. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB)=tr(BA)$. Berdasarkan matriks A dan B diperoleh:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(AB)&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+ \\ &\quad a_{2n}b_{n2})+\cdots+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn}) \qquad (2.10) \end{aligned}$$

selanjutnya

$$BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \quad (2.11)$$

maka

$$\begin{aligned} tr(BA) &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\ &= tr(AB) \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.10) dan Persamaan (2.11) maka terbukti $tr(AB) = tr(BA)$.

Diberikan contoh untuk menentukan *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dengan n ganjil dan n genap sebagai berikut.

Contoh 2.2 Tentukan $tr(A^9)$ dan $tr(A^{10})$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, maka harus dikalikan sebanyak 10 kali sehingga diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -12 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ 20 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^6 \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ 20 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 28 & -17 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^7 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 28 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 3 \\ -12 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^9 = A^8 \cdot A = \begin{bmatrix} -20 & 3 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 17 \\ -68 & 23 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = A^9 \cdot A = \begin{bmatrix} -28 & 17 \\ -68 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ -44 & 45 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$tr(A^9) = (-28) + 23 = -5$

$tr(A^{10}) = 12 + 45 = 57$

2.6 *Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai *trace* suatu matriks 2×2 yang dibentuk secara khusus telah dibahas oleh Titik Fatonah pada tahun 2017 dalam makalahnya dengan judul "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif".

Bentuk umum untuk A^n matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dinyatakan dalam Teorema 2.5 sebagai berikut:

Teorema 2.5: Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

$p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil, dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1 b^0 \\ a^0 b^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ benar.}$$

2) Asumsikan untuk $n = k$,$p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$A^{k+2} = (A^k \cdot A^2)$$

$$= (A^k \cdot A \cdot A)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ab\left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \right) \\ ab\left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \text{ untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap, dibuktikan sebagai berikut:}$$

1) Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A^2 = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & 0 \\ 0 & a^1 b^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}, \text{ benar.}$$

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$\begin{aligned}
A^{k+2} &= (A^k \cdot A^2) \\
&= (A^k \cdot A \cdot A) \\
&= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} ab\left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}\right) & 0 \\ 0 & ab\left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ untuk n genap.

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.5 terbukti.

Selanjutnya, bentuk umum $tr(A^n)$ matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dinyatakan dalam Teorema 2.6 sebagai berikut:

Teorema 2.6: Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}} (\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$, untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka didapat bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

maka terbukti $tr(A^n) = 0$, untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka dapat diduga bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2\big(-(-ab)\big)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(\det(A))^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$$

maka terbukti $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap.

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4.2 terbukti.

Contoh 2.3 Tentukan $tr(A^7)$ dan $tr(A^8)$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$tr(A) = 2 + 3 = 5$

dan

$$\det(A) = 6 - 1 = 5$$

Sehingga menurut Persamaan (2.27) diperoleh:

$$tr(A^7) = 0 + 0 = 0$$

dan

$$\begin{aligned} tr(A^8) &= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} \\ &= 2(-1)^4(5)^4 \\ &= 1250 \end{aligned}$$

2.7 Induksi Matematika

Definisi 2.6 (Munir, 2010) Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, akan ditunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah terbukti bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.4: Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematika bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

1. *Basis induksi*: akan ditunjukkan $p(1)$ benar yaitu untuk $n = 1, 1^3 + 2(1) = 3$ adalah kelipatan 3.

2. *Langkah induksi*: misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 diasumsikan benar (hipotesis induksi). Akan diperlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu:

$(n+1)^3 + 2(n+1)$ adalah kelipatan 3

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)\\ &= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Karena $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi) dan $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3, maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3, oleh karena itu $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3.

Karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.