BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Optimasi

Optimasi adalah sarana untuk mengekspresikan model matematika yang bertujuan memecahkan masalah dengan cara terbaik. Model optimasi telah digunakan selama berabad-abad untuk tujuan bisnis, hal ini berarti memaksimalkan keuntungan dan efisiensi serta meminimalkan kerugian, biaya atau resiko (Purba: 2012). Dalam optimasi, yang akan dicari adalah nilai-nilai variabel yang tidak melanggar (bertentangan) dengan pembatas-pembatas atau fungsi kendalanya dan yang memberikan nilai optimal (maksimum atau minimum) pada fungsi tujuan. Sementara itu, Dimyati (2009) mengatakan perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil optimum, yaitu hasil yang mencapai tujuan terbaik diantara seluruh alternatif yang fisibel adalah program linier *(linear programming).*

Menurut Purba (2012), agar suatu masalah optimasi dapat diselesaikan dengan program linier, ada beberapa syarat atau karakteristik yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Masalah tersebut harus dapat diubah menjadi permasalahan matematik. Ini berarti bahwa masalah tersebut harus bisa dituangkan ke dalam bentuk model matematik, dalam hal ini model linear, baik berupa persamaan maupun pertidaksamaan.
2. Adanya sasaran. Sasaran dalam model matematika masalah program linear berupa fungsi tujuan (fungsi objektif) yang akan dicari nilai optimalnya (maksimum atau minimum).
3. Ada tindakan alternatif, artinya nilai fungsi tujuan dapat diperoleh dengan berbagai cara dan diantaranya alternatif itu memberikan nilai optimal.
4. Sumber-sumber tersedia dalam jumlah yang terbatas (bahan mentah terbatas, modal terbatas, waktu terbatas, dll). Pembatasan-pembatasan harus dinyatakan di dalam ketidaksamaan yang linear.

5. Keseluruhan sistem permasalahan harus dapat dipilih-pilih menjadi satuan-satuan aktivitas, sebagai misal: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq k_1$, di mana x_1 dan x_2 adalah aktivitas.
6. Masing-masing aktivitas harus dapat ditentukan dengan tepat baik jenis maupun letaknya dalam model programasi.
7. Setiap aktivitas harus dapat dikuantifikasikan sehingga masing-masing nilainya dapat dihitung dan dibandingkan.
8. Koefisien model diketahui dengan pasti.
9. Bilangan yang digunakan dapat bernilai bulat atau pecahan.
10. Semua variabel keputusan harus bernilai non negatif.

2.2 *Linear Programming* (LP)

Linear programming (program linier) merupakan suatu teknik untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara terbaik sehingga menghasilkan solusi optimal. Penyelesaiannya, *linear programming* menggunakan model matematis yang dibangun dengan diperlukannya fungsi tujuan dan fungsi kendala.

Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran di dalam permasalahan *linear programming* yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal (maksimum atau minimum). Umumnya nilai yang akan dioptimalkan dinyatakan sebagai Z. Fungsi batasan merupakan bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai aktivitas.

Formulasi model matematis dari *linear programming* yaitu:

$$(Max/\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i, \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0,$$

dengan

Z: Fungsi tujuan (*Objective function*)

x : Variabel keputusan

c : Kontribusi masing-masing variabel terhadap tujuan

a : Penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi

b : Jumlah tiap sumber daya yang tersedia

x_j: Pembatas non negatif

i : 1, 2, ... , m

j : 1, 2, ... , n

2.3 *Integer Programming*

Menurut Hotniar Siringoringo (2005), Pada masalah program linier penyelesaian optimalnya dapat berupa bilangan real yang bearti penyelesaian bisa berupa bilangan pecahan. Untuk penyelesaian yang berbentuk pecahan jika mengalami pembulatan ke *integer* terdekat maka hasil yang diperoleh bisa menyimpang jauh dari yang diharapkan. Akan tetapi banyak permasalahan di kehidupan nyata yang memerlukan penyelesaian variabel keputusannya berupa *integer* sehingga harus dicari model penyelesaian masalah sehingga diperoleh penyelesaian integer yang optimum.

Integer programming merupakan pengembangan dari program linier di mana beberapa atau semua variabel keputusannya harus berupa *integer*. Jika hanya sebagian variabel keputusannya merupakan *integer* maka disebut program *integer* campuran. Jika semua variabel keputusannya bernilai integer disebut program *integer* murni.

2.4 *Simplex Method* (Metode Simpleks)

Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumberdaya secara optimal. Metode simpleks digunakan untuk mencari nilai optimal dari program linier yang melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel (lebih dari dua variabel). Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam riset operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program computer.

Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang digunakan dalam pemrograman linier adalah metode simpleks. Penentuan solusi optimal menggunakan metode simpleks didasarkan pada teknik eleminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan cara perhitungan iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-i hanya tergantung dari iterasi sebelumnya ($i - 1$).

Menurut Hotniar Siringoringo (2005), langkah-langkah metode simpleks adalah sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan batasan-batasan

   Fungsi tujuan diubah menjadi fungsi implisit, artinya semua $c_j x_j$ digeser ke kiri.

2. Menyusun persamaan-persamaan di dalam tabel

   Setelah formulasi disusun ke dalam tabel dan simbol, maka akan tampak seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Tabel Simpleks dalam Bentuk Simbol

Variabel dasar	Z	x_1	x_2		x_n	x_{n+1}	x_{n+2}		x_{n+m}	NK
Z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m

NK adalah nilai kanan persamaan, yaitu nilai dibelakang tanda sama dengan $(=)$. Variabel dasar adalah variabel yang nilainya sama dengan sisi kanan dari persamaan. Berdasarkan tabel tersebut, nilai variabel dasar pada fungsi tujuan ini (fungsi permulaan) ini harus 0, dan nilainya pada kendala-kendala bertanda positif. Setelah data disusun dalam tabel-tabel di atas kemudian di adakan perubahan-perubahan agar dapat mencapai titik optimal, dengan langkah-langkah selanjutnya.

3. Memilih kolom kunci

Kolom kunci adalah kolom yang merupakan dasar untuk mengubah tabel di atas. Dipilih kolom yang mempunyai nilai pada baris fungsi tujuan yang bernilai negatif dengan angka terbesar untuk kasus maksimum, kalau suatu tabel sudah tidak memiliki nilai negatif pada baris fungsi tujuan, berarti tabel itu tidak bisa dioptimalkan lagi, dan dipilih kolom yang mempunyai nilai pada baris fungsi tujuan yang bernilai positif dengan angka terbesar untuk kasus minimum, kalau suatu tabel sudah tidak memiliki nilai positif pada baris fungsi tujuan, berarti tabel itu tidak bisa dioptimalkan lagi.

4. Memilih baris kunci

Baris kunci adalah baris yang merupakan dasar untuk mengubah tabel tersebut di atas. Untuk itu, terlebih dahulu dicari indeks tiap-tiap baris dengan cara membagi nilai-nilai pada kolom NK dengan nilai yang sebaris pada kolom kunci.

$$indeks = {}^{nilai\ kolom\ NK}/_{nilai\ kolom\ kunci}. \qquad (2.3)$$

Kemudian dipilih angka yang memiliki nilai positif terkecil.

5. Mengubah nilai-nilai baris kunci

Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci.

6. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci

Nilai-nilai baris yang lain, selain pada baris kunci dapat diubah dengan rumus berikut:

$$baris\ baru = baris\ lama - (koefisien\ pada\ kolom\ kunci) \times nilai\ baru\ baris\ kunci \qquad (2.4)$$

7. Melanjutkan perbaikan-perbaikan atau perubahan-perubahan

Ulangi langkah perbaikan mulai langkah ke-3 sampai langkah ke-6 untuk memperbaiki tabel-tabel yang telah diubah atau diperbaiki nilainya.

Perubahan baru berhenti setelah baris pertama (fungsi tujuan) tidak ada yang bernilai non negatif.

Selain itu juga ada penyimpangan-penyimpangan dari bentuk standar, di mana penyimpangan-penyimpangan tersebut akan di atasi agar bisa diselesaikan dengan metode simpleks diantaranya adalah:

a. Batasan dengan tanda "sama dengan"
Jika suatu batasan memakai tanda kesamaan, maka cara mengatasinya dengan menambahkan variabel buatan (*artificial variable*).
b. Minimasi
Fungsi tujuan dari permasalahan *linear programming* yang bersifat minimasi, harus diubah menjadi maksimasi, agar sesuai dengan bentuk standar, yaitu maksimasi. Caranya adalah dengan mengganti tanda positif dan negatif pada fungsi tujuan.
c. Fungsi pembatas bertanda $\geq$
Bila suatu fungsi pembatas bertanda $\geq$, maka harus diubah menjadi $\leq$ dan akhirnya menjadi $=$ agar dapat diselesaikan dengan metode simpleks.
d. Bagian kanan persamaan bertanda negatif
Bila bagian kanan persamaan bertanda negatif maka harus diubah menjadi positif. Caranya dengan mengubah tanda positif negatif dari tiap-tiap koefisien, kemudian ditambah dengan variabel buatan.

2.5 Metode Dual Simpleks

Apabila pada suatu iterasi kita mendapatkan persoalan pogram linier yang sudah optimum (berdasarkan kondisi optimalitas), tetapi belum fisibel (ada pembatas nonnegatif yang tidak terpenuhi) maka persoalan tersebut harus diselesaikan dengan menggunakan metode dual simpleks. Syarat digunakannya metode ini adalah bahwa seluruh pembatas harus merupakan ketidaksamaan yang bertanda ($\geq$), sedangkan fungsi tujuan bisa berupa maksimasi dan minimasi.

Pada dasarnya metode dual simpleks ini menggunakan tabel yang sama seperti metode simpleks pada primal, tetapi *leaving* dan *entering variabel*-nya ditentukan sebagai berikut:

1. *Leaving variable* (kondisi fisibilitas)

Yang menjadi leaving variabel pada dual simpleks adalah variabel basis yang memiliki nilai negatif terbesar. Jika semua variabel basis telah berharga positif atau nol, berarti keadaan fisibel telah tercapai.

2. *Entering variable* (kondisi optimalitas)
   a. Tentukan perbandingan (rasio) antara koefisien persamaan *Z* dengan koefisien persamaan leaving variabel. Abaikan penyebut yang positif atau nol. Jika penyebut berharga positif atau nol, berarti persoalan yang bersangkutan tidak memiliki solusi fisibel.
   b. Untuk persoalan minimasi, *entering variable* adalah variabel dengan rasio terkecil, sedangkan untuk persoalan maksimasi, *entering variable* adalah variabel dengan rasio absolut terkecil.

2.6 Metode *Cutting Plane*

Suatu prosedur sistematik untuk memperoleh solusi integer optimum terhadap integer programming pertama kali ditemukan oleh R.E Gomory. Metode *cutting plane* merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier untuk variabelnya harus bulat, dengan penambahan batasan baru yang disebut dengan *gomory*. Kendala *gomory* diberikan jika variabel keputusan belum bulat (bernilai pecahan). Metode bidang potong (*cutting plane*) menambahkan sejumlah kendala sehingga diperoleh daerah fisibel baru yang penyelesaiannya merupakan bilangan bulat.

Langkah-langkah penyelesaian metode *cutting plane*:

1. Selesaikan masalah integer programming dengan menggunakan metode dual simpleks.
2. Periksa solusi optimum yang diperoleh dari langkah satu, jika variabel keputusan solusi optimum sudah bernilai bulat (*integer*) maka proses selesai. Jika variabel keputusan pada solusi optimum masih bernilai pecahan maka proses berlanjut ke tahap berikutnya.
3. Buat batasan/kenala *gomory* dan selesaikan dengan metode dual simpleks.
4. Kembali ke langkah 2.

Tabel 2.2 Solusi Optimal Program linier

B	x_1	...	x_m	x_j	...	x_n	Nilai Kanan/Solusi
x_1	1	$\cdots$	0	a_{11}	$\cdots$	a_{in}	b_1
$\vdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	0	$\cdots$	1	a_{ml}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Z	0	$\cdots$	0	c_1	$\cdots$	c_n	b_0

Dengan x_i adalah variabel basis, $i:1,\ 2,\ ...,\ m$

x_j adalah variabel non basis, 1, 2, ..., n

Perhatikan persamaan ke- i di mana variabel x_i diasumsikan bernilai *noninteger*.

$x_i = b_i \sum a_{ij} x_j$ dengan b *noninteger* (baris sumber).

Kemudian pisahkan b_i dan a_{ij} menjadi bagian yang bulat dan pecahan non negatif seperti berikut: $b_i = b_i' + f_i$ dan $a_{ij} = a_{ij}' + f_i$ dengan $0 \le f_i \le 1$, misalnya:

b_i	b_i'	f_i
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{7}{8}$	0	$\frac{7}{8}$
$\frac{7}{3}$	2	$\frac{1}{3}$
$-\frac{7}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$
-1	-1	0
$-\frac{2}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$

Tambahkan kendala *gomory* dalam bentuk $S_g = S_g - \sum f_{ij} x_j = -f_i$ dengan S_g adalah *variable slack gomory*. Pada umumnya, persamaan kendala yang berhubungan dengan solusi pecah dipilih untuk menghasilkan suatu kendala *gomory*. Namun sebagai aturan main biasanya dipilih persamaan yang memiliki f_i maksimum.

Tabel 2.3 Setelah Penambahan Kendala *Gomory*

B	x_1	...	x_m	x_j	...	x_n	S_g	Nilai Kanan/Solusi
x_1	1	...	0	a_{11}	...	a_{in}	0	b_1
$\vdots$	0	...	...	...	...	...	...	...
x_m	0	...	1	a_{ml}	...	a_{mn}	0	b_m
S_g	0	...	0	$-f_{i1}$	$-f_{in}$	1	1	$-f_i$
Z	0	...	0	c_1	...	c_n	0	b_0

Penyelesaian optimal masalah primal tersebut menggunakan metode dual simpleks karena didapatkan solusi optimal yang tidak layak. Pembentukan kendala *gamory* dihentikan jika solusi integer sudah diperoleh, namun jika solusi integer belum diperoleh maka kendala *gamory* dibuat lagi. Jika disetiap iterasi tidak ditemukan solusi *integer* maka tidak ditemukan solusi *integer* yang layak.

Contoh Soal:

Seorang peternak kambing memberi makan kambingnya dengan makanan kambing super cap matahari mengandung 1 unit anti biotik A dan 4 anti biotik B, makanan kambing cap Bintang mengandung 3 unit anti biotik A dan 2 anti biotik B. Kebutuhan makanan kambing setiap harinya memerlukan paling sedikit 5 unit anti biotik A dan 7 unit anti biotik B. Jumlah unit untuk setiap jenis unsur anti biotik yang terkandung dalam satu kilogram setiap jenis makanan disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2.4 Tabel Makanan Kambing Cap Matahari dan Cap Bintang

Anti Biotik	Makanan Kambing		Kebutuhan Minimum
	Cap Matahari	Cap Bintang	
A	1	4	5
B	3	2	7
Harga	4000	5000	

Jika harga satu kg makanan cap matahari Rp 4000 dan satu kg makanan cap bintang Rp 5000. Tentukan berapa kg masing-masing makanan yang harus disediakan agar pengeluaran minimum.

Penyelesaian:

a. Menyelesaikan permasalahan dengan metode *linear programming*

Langkah-langkah menyelesaikan permasalahan di atas adalah sebagai berikut:

1. Menyusun model *linear programming.*

   a.) Menentukan variabel keputusan:

   x_1 : Jumlah makanan kambing cap matahari yang harus disediakan

   x_2 : Jumlah makanan kambing cap bintang yang harus disediakan

   b.) Menentukan fungsi tujuan:

   $$\textit{Minimumkan } Z = 4.000x_1 + 5.000x_2 \quad (2.5)$$

   c.) Menentukan fungsi kendala:

   $$1x_1 + 4x_2 \geq 5$$
   $$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$
   $$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.6)$$

2. Menyelesaikan model *LP* menggunakan metode dual simpleks.

   Karena semua pembatasnya merupakan bertanda $(\geq)$ dengan demikian penyelesaian persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan metode dual simpleks, langkah pertama yang harus dilakukan ialah mengubah arah ketidaksamaan pembatas sehingga bertanda $\leq$, kemudian menambahkan variabel-variabel slack.

   Diperoleh formula baru sebagai berikut:

   $$\textit{Minimumkan } Z = -4.000x_1 - 5.000x_2 = 0 \quad (2.7)$$

   dengan kendala:

   $$-1x_1 - 4x_2 + S_1 = -5$$
   $$-3x_1 - 2x_2 + S_2 = -7$$
   $$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \quad (2.8)$$

Tabel 2.5 Tabel Awal Simpleks

Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	Solusi
0	Z	-4.000	-5.000	0	0	0
	S_1	-1	-4	1	0	-5
	S_2	-3	-2	0	1	-7

Perhatikan bahwa variabel-variabel basis awalnya tidak memberikan solusi awal yang fisibel (S_1 dan S_2 berharga negatif), tetapi koefisien persamaan Z sudah memenuhi kondisi optimalitas. S_2 $(=-7)$ terpilih sebagai *leaving variable* karna memiliki nilai negatif terbesar.

Tabel 2.6 Tabel Rasio Simpleks

	x_1	x_2	S_1	S_2
Koefisien persamaan Z	-4.000	-5.000	0	0
Koefisien persamaan S_2	-3	-2	0	1
Rasio	1333,3	2500	-	-

Sedangkan x_1 terpilih sebagai *entering variable,* dipilih dari rasio terkecil. Selanjutnya menentukan persamaan pivot baru dan mengisi persamaan yang masih kosong. Setelah mencari persamaan Z dan S_1 baru kemudian dibuat dalam tabel simpleks sebagai berikut:

Tabel 2.7 Tabel Iterasi-1 Simpleks

Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	Solusi
1	Z	0	$-\frac{7.000}{3}$	0	$-\frac{4.000}{3}$	$\frac{28.000}{3}$
	S_1	0	$-\frac{10}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$
	x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$

Berdasarkan iterasi awal terlihat bahwa meskipun koefisien persamaan Z sudah memenuhi kondisi optimal (baris Z sudah nol atau negatif untuk kasus minimasi), tetapi variabel-variabel basis awalnya tidak memberikan solusi awal yang fesibel (S_1) bernilai negatif. Sehingga perlu dilakukan langkah-langkah perbaikan dengan melanjutkan iterasi berikutnya sampai tabel simpleks optimal. Sehingga didapat tabel berikut:

Tabel 2.8 Tabel Iterasi-2 Simpleks

Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	Solusi
2	Z	0	0	$-\frac{7.000}{10}$	$-\frac{11.000}{10}$	11.200
	x_2	0	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
	x_1	1	0	$\frac{2}{10}$	$-\frac{4}{10}$	$\frac{18}{10}$

Berdasarkan Tabel 2.8 pada iterasi kedua tabel sudah optimal, ini terlihat dari nilai pada baris fungsi tujuan sudah bernilai negatif atau nol dan variabel-variabel basis bernilai positif, sehinga iterasi dihentikan.

Tabel 2.9 Tabel Optimal Simpleks

Basis	x_1	x_2	S_1	S_2	Solusi
Z	0	0	$-\frac{7.000}{10}$	$-\frac{11.000}{10}$	11.200
x_2	0	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	0,8
x_1	1	0	$\frac{2}{10}$	$-\frac{4}{10}$	1,8

Solusi optimal:

$x_1 =\ 1{,}8$, $x_2 =\ 0{,}8$ dan

$Z = 4.000(1{,}8) + 5.000(0{,}8) \quad = 11.200$

yang artinya diperoleh jumlah makanan kambing cap matahari (x_1) adalah 1,8 kilogram dan jumlah makanan kambing cap bintang (x_2) adalah 0,8 kilogram dengan biaya minimum (Z) sebesar Rp 11.200. Karena penyelesaian optimalnya memiliki nilai variabel yang *noninteger* maka dapat diselesaikan menggunakan metode *cutting plane.*

b. Selanjutnya menentukan solusi *integer linear programming* dengan menggunakan metode *cutting plane.*

1.) Program-1

$$\textit{Minimumkan } Z = -4.000x_1 - 5.000x_2 = 0 \tag{2.9}$$

dengan kendala:

$$-1x_1 - 4x_2 + x_3 = -5$$
$$-3x_1 - 2x_2 + x_4 = -7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \textit{ bilangan bulat tidak negatif} \tag{2.10}$$

Tabel 2.10 Solusi Optimal *Linear Pogramming*

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
x_3	-1	-4	1	0	-5
x_4	-3	-2	0	1	-7
Z_j	-4.000	-5.000	0	0	0
x_3	0	$-\frac{10}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
Z_j	0	$-\frac{7.000}{3}$	0	$\frac{4.000}{3}$	$\frac{28.000}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
x_1	1	0	$\frac{2}{10}$	$-\frac{4}{10}$	$\frac{18}{10}$
Z_j	0	0	$-\frac{7.000}{10}$	$-\frac{11.000}{10}$	11.200

Berdasarkan Tabel 2.10 menunjukkan bahwa penyelesaian optimalnya adalah: $x_1 = \frac{18}{10}$,

$x_2 = \frac{8}{10}$ dan

$Z = 11.200$

Persamaan yang sesuai adalah:

$$x_1 + \frac{2}{10}x_3 - \frac{4}{10}x_4 = \frac{18}{10}$$

$$x_2 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{8}{10}$$

Tampak bahwa baik x_1 maupun x_2 bukan merupakan penyelesaian bulat sehingga bukanlah penyelesaian optimalnya. Maka pemotongannya bisa menggunakan baris x_1 maupun x_2, tetapi karena f_i untuk baris x_1 paling besar sehingga pemotongan akan dilakukan berdasarkan pada baris x_1 yaitu:

$$x_1 + \left(0 + \frac{2}{10}\right)x_3 + \left(-1 + \frac{6}{10}\right)x_4 = 1 + \frac{8}{10}$$

Maka kendala yang ditambahkan pada iterasi berikutnya adalah:

$$\frac{2}{10}x_3 + \frac{6}{10}x_4 \geq \frac{8}{10}$$

$$\frac{2}{10}x_3 + \frac{6}{10}x_4 - S_1 = \frac{8}{10}$$

$$-\frac{2}{10}x_3 - \frac{6}{10}x_4 + S_1 = -\frac{8}{10}$$

2.) Program-2

Minimumkan $Z = -4.000x_1 - 5.000x_2 = 0$ (2.11)

dengan kendala

$$-1x_1 - 4x_2 + x_3 = -5$$

$$-3x_1 - 2x_2 + x_4 = -7$$

$$-\frac{2}{10}x_3 - \frac{6}{10}x_4 + S_1 = -\frac{8}{10}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1 \text{ } \textit{bilangan bulat tidak negatif} \quad (2.12)$$

Kendala baru ini dimasukkan ke tabel simpleks terakhir sehingga diperoleh tabel simpleks baru, yaitu:

Tabel 2.11 Tabel Simpleks (penambahan kendala *gomory* I)

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Solusi
x_2	0	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{8}{10}$
x_1	1	0	$\frac{2}{10}$	$-\frac{4}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
S_1	0	0	$-\frac{2}{10}$	$-\frac{6}{10}$	1	$-\frac{8}{10}$
Z_j	0	0	$-\frac{7.000}{10}$	$-\frac{11.000}{10}$	0	$-\frac{112.000}{10}$
x_2	0	1	$-\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
x_1	1	0	$\frac{2}{6}$	0	$-\frac{4}{6}$	$\frac{14}{6}$
x_4	0	0	$\frac{2}{6}$	1	$-\frac{10}{6}$	$\frac{8}{6}$
Z_j	0	0	$-\frac{2.000}{6}$	0	$-\frac{11.000}{6}$	$\frac{76.000}{6}$

Persamaannya adalah:

$$x_1 + \frac{2}{6}x_3 - \frac{4}{6}S_1 = \frac{14}{6}$$

$$x_2 - \frac{2}{6}x_3 + \frac{1}{6}S_1 = \frac{4}{6}$$

$$\frac{2}{6}x_3 + x_4 - \frac{10}{6}S_1 = \frac{8}{6}$$

Berdasarkan Tabel 2.11 menunjukkan bahwa penyelesaian optimalnya adalah $x_1 = \frac{14}{6}, x_2 = \frac{48}{6}$ dan $Z = \frac{76000}{6}$. Terlihat bahwa x_1 maupun x_2 bukan merupakan penyelesaian bulat sehingga bukanlah penyelesaian optimalnya. Maka perlu ditambah kendala baru lagi, dan pemotongan akan dilakukan berdasarkan pada baris x_2 yaitu:

$$x_2 + \left(-1 + \frac{4}{6}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{6}\right)S_1 = 0 + \frac{4}{6}$$

Maka kendala yang ditambahkan pada iterasi berikutnya adalah:

$$\frac{4}{6}x_3 + \frac{1}{6}S_1 \geq \frac{4}{6}$$
$$\frac{4}{6}x_3 + \frac{1}{6}S_1 - S_2 = \frac{4}{6}$$
$$-\frac{4}{6}x_3 - \frac{1}{6}S_1 + S_2 = -\frac{4}{6}$$

3.) Program-3

$$\textit{Minimumkan } Z = -4.000x_1 - 5.000x_2 = 0 \tag{2.13}$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} &-1x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ &-3x_1 - 2x_2 + x_4 = -7 \\ &-\frac{2}{10}x_3 - \frac{6}{10}x_4 + S_1 = -\frac{8}{10} \\ &-\frac{4}{6}x_3 - \frac{1}{6}S_1 + S_2 = -\frac{4}{6} \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2 \textit{ bilangan bulat tidak negatif} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Kendala baru dimasukkan lagi ke tabel simpleks terakhir sehingga diperoleh tabel simpleks baru, yaitu:

Tabel 2.12 Tabel Simpleks Optimal (penambahan kendala *gomory* II)

B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	Solusi
x_2	0	1	$-\frac{2}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
x_1	1	0	$\frac{2}{6}$	0	$-\frac{4}{6}$	0	$\frac{14}{6}$
x_4	0	0	$\frac{2}{6}$	1	$-\frac{10}{6}$	0	$\frac{8}{6}$
S_2	0	0	$-\frac{4}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{4}{6}$
Z_j	0	0	$-\frac{2.000}{6}$	0	$-\frac{11.000}{6}$	0	$\frac{76.000}{6}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
x_4	0	0	0	1	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	1
Z_j	0	0	0	0	$-\frac{7.000}{4}$	$-\frac{1.000}{2}$	13.000

Berdasarkan Tabel 2.12 tampak pada program-3 nilai x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian bilangan bulat, sehingga penyelesaian program-3 merupakan penyelesaian optimalnya, yaitu $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ dan $Z = 13000$. Sehingga dapat disimpulkan metode *cutting plane*, seorang peternak kambing tersebut harus menyediakan makanan cap matahari (x_1) adalah 2 kg makanan cap bintang (x_2) adalah 1 kg dengan biaya minimum (Z) sebesar Rp 13.000.