BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Menurut Howard Anton (1987) Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persaman linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

dari Persamaan (2.1) di bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$. = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

maka Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi $f(x) = Ax$, sehingga jika di diferensialkan secara parsial maka di peroleh

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \tag{2.3}$$

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))$ untuk $f_1 = 4x_1 + 5x_2$ dan $f_2 = 6x_1 + 9x_2$

Penyelesaian:

Untuk mencari $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))$ dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 5x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1 + 9x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(6x_1 + 9x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = A$$

Selanjutnya, jika di ambil $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^T\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{y}^T\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{y}^T\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{y}. \tag{2.4}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{y}^T A\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{y}^T A\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^T A^T\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T A^T\mathbf{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T A^T\mathbf{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\mathbf{y}. \tag{2.5}$$

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{y}$ dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}) = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 5x_2 \\ 6x_1 & + & 9x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,(4x_1y_1 + 5x_2y_1 + 6x_1y_2 + 9x_2y_2) &= \begin{bmatrix} 4y_1 & + & 5y_2 \\ 6y_1 & + & 9y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= A^T\mathbf{y}\end{aligned}$$

Jika matriks A adalah matriks simetri, maka:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^T A\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}. \qquad (2.6)$$

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{x}^T A\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{x}^T A\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^T A\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4x_1 & + & 6x_2 \\ 6x_1 & + & 5x_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(4{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) &= \begin{bmatrix} 2.4x_1 & + & 2.6x_2 \\ 2.6x_1 & + & 2.5x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 4x_1 & + & 6x_2 \\ 6x_1 & + & 5x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2A\mathbf{x}\end{aligned}$$

2.2 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yang bersifat definit positif maupun definit negatif. Diawali dari bentuk kuadratik yaitu $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2. \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j\,, \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dengan $i = j$, $j = n$ dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Menurut Ogata (2009), sifat definit dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A. Sehingga jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka secara lengkap bentuk kudratik $\boldsymbol{x^T A x}$ adalah sebagai berikut:

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua *i*
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.

Jika matriks A tidak memenuhi keempat syarat diatas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite*. Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_i x_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Untuk menentukan sifat definit dari matriks A dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_i x_j \\ &= -5x_1x_1 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5x_2x_2 \\ &= -5{x_1}^2 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5{x_2}^2 \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}\,(\lambda \text{I} - \text{A}) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$[(\lambda+5)(\lambda+5)+25 = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0.$$

maka diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -5$$

Jadi, karena $\lambda_1 < 0, i = 1,2$ maka dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas memiliki matriks definit negatif.

Contoh 2.5:

Tentukanlah sifat definit dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x^T A x}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Untuk menentukan sifat definit dari matriks A dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\text{Det}\,(\lambda\text{I} - \text{A}) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$[(\lambda-5)\,(\lambda-5)-25] = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 10$$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 10$, karena $\lambda_1 < 0, i = 1,2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif.

2.3 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Contoh 2.7:

Tentukanlah titik ekuilibrium dari persamaan differensial berikut, $\dot{x} = -x_1$ dan $\dot{x} = -x_2$

Penyelesaian:

Untuk menentukan titik ekuilibrium dari persamaan $\dot{x} = -x_1$ dan $\dot{x} = -x_2$ dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya adalah $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$.

Definisi titik equilibirium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x_0} - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil. Untuk lebih memahami teorema di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut:

Contoh 2.8:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial berikut $\dot{x} = x$ dengan diperoleh titik equilibrium $\bar{x} = 0$.

Penyelesaian:

Solusi persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

$$\ln x = t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln\, x_0$

Sehingga

$$\ln x - c = t$$

$$\ln x - \ln x_0 = t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^t$$

$$x = x_0\, e^t$$

maka untuk $t \to \infty$ dan $x \to \infty$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = x$ tidak stabil karena solusinya menuju ∞.

Contoh 2.9:

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$\dot{x_1} = -x_1$ dan $\dot{x_2} = -2x_2$

sehingga dapat dicari solusi masing-masing yaitu:

untuk $\dot{x_1} = -x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -dt$$

$$\ln x_1 = -t + c$$

Karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_1 - c = -t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -t$$

$$ln \frac{x_1}{x_0} = -t$$

$$x_1 = x_0 . e^{-t}$$

maka untuk $t \to \infty$ maka $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena setiap solusinya menuju 0.

Berikutnya solusi untuk $\dot{x_2} = -2x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$ln\frac{x_2}{x_0} = -2t$$

$$x_2 = x_0 . e^{-2t}$$

maka untuk $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena setiap solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

2.4 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah kestabilan bentuk kanonik teramati lingkar tertutup untuk waktu kontinu.

2.4.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{2.9}$$

dengan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor state dan $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah vektor kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan:

$$J(t_0) = \phi(\mathbf{x}(T_f), T_f) + \int_{t_0}^{T_f} L(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(t), t) dt, \tag{2.10}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi ojektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton: $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), t) + \lambda^T(t) f(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), t)$ (2.11)

Persamaan *state*: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.12)

Persamaan *konstate*: $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), t)}{\partial \mathbf{x}}(t), \; t \leq T_f.$ (2.13)

Persamaan *stasionar*: $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial L(\mathbf{x}(\mathrm{t}), \mathbf{u}(\mathrm{t}), t)}{\partial \mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (2.14)

2.4.2 Kendali Lingkar Tertutup Linier Kuadratik

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkar tertutup didefinisikan persamaan sistem linier untuk waktu t.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \tag{2.14}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i\, \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$,dan meminimalkan fungsi objektif yaitu:

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})dt, \tag{2.15}$$

dengan t_0 waktu awal T_f adalah waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif. Selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen non negatif sehingga $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}Q\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\,(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\mathbf{x}$(t). Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\mathbf{u}^T R\mathbf{u} > 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan aljabar Riccati sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meninimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan (2.14) dan (2.15) diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut.

Persamaan Hamilton: $H(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}).$ (2.16)

Persamaan state yaitu: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\mathbf{x}(\mathbf{t}) + B\mathbf{u}(\mathrm{t}).$ (2.17)

Persamaan kostate yaitu: $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = Q\mathbf{x}(\mathrm{t}) + A^T\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}).$ (2.18)

Persamaan stasioner yaitu: $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u}(t) + B^T\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}) = 0.$ (2.19)

Berdasarkan Persamaan (2.19) diperoleh $\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.20)

Selanjutnya Persamaan (2.20) disubtitusikan ke Persamaan (2.17) maka diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(\mathrm{t}) - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t}). \quad (2.21)$$

berdasarkan persamaan (2.15) diperoleh

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{T_f} = S(T_f)\mathbf{x}(T_f), \quad (2.22)$$

untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diamsumsikan $\mathbf{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.22) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.23)$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.23) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S\dot{\mathbf{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.21) diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S\dot{\mathbf{x}} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^T S\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Dari Persamaan (2.18) didapat $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$. Selanjutnya, subtitusikan ke Persamaan (2.24) $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^T S\mathbf{x})$$

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^T S\mathbf{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^T S\mathbf{x} + Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}, \text{ dimana } \boldsymbol{\lambda} = S\mathbf{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^T S\mathbf{x} + Q\mathbf{x} + A^T S\mathbf{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T\mathrm{S} + \mathrm{Q})\mathbf{x}.$$

. $$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T\mathrm{S} + \mathrm{Q}$$

$$\dot{S} = -A^T S - SA + SBR^{-1}B^T\mathrm{S} - \mathrm{Q}. \quad (2.25)$$

Karena Persamaan (2.25) memenuhi untuk setiap waktu t. Persamaan diatas disebut Persamaan diferensial Riccati. Jika S adalah solusi untuk Persamaan diferensial Riccati (2.25) maka dapat dibentuk fungsi kendali yaitu sebagai berikut:

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^{T}S(t)\mathbf{x}(t). \tag{2.26}$$

Selanjutnya untuk menganalisa kestabilan persamaan diferensial dinamik maka disubtitusikan (2.26) ke Persamaan (2.14) diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\left(-R^{-1}B^{T}S(t)\mathbf{x}(t)\right),$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BR^{-1}B^{T}S(t))\mathbf{x}(t) \tag{2.27}$$

Persamaan (2.27) mencapai kestabilan jika seluruh nilai eigen Persamaan (2.27) tidak ada yang bernilai positif.

2.5 Bentuk Kanonik Teramati untuk Waktu Kontinu

Menurut Ogata (2009) diberikan fungsi transfer untuk sistem diferensial linier waktu kontinu yaitu:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) dapat direpresentasikan menjadi bentuk kanonik teramati sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \tag{2.29}$$

untuk lebih memahami teorema di atas, maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.10:

Bentuklah persamaan $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^3 - z^2 + 2z}{z^2 - 4z + 1}$ ke bentuk kanonik teramati.

Penyelesain:

Persamaan fungsi transfer di atas dapat di bentuk menjadi kanonik teramati berdasarkan persamaan (2.29) sehingga didapat hasilnya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} u$$