# BAB II

# LANDASAN TEORI

## 2.1 Matriks

Menurut **Howard Anton (1987)** Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem Persaman linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

dari sistem Persamaan (2.1) dibentuk matriks yaitu:

$$
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix},
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}
$$

Selanjutnya Persamaan (2.2) dinotasikan:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},
$$

Diperoleh sistem persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \ \ dx_2 \ \ \dots \ \ dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \tag{2.3}$$

Untuk memahami persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.1:**

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)$ untuk $f_1 = 4x_1 + 10x_2$ dan $f_2 = 2x_1 + 5x_2$

**Penyelesaian:**

Berdasarkan persamaan (2,3) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 10x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 10x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 5x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}. \tag{2.4}$$

selanjutnya berlaku hubungan:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.5}$$

Selanjutnya untuk memahami Persamaan (2.5), maka diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.2:**

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian:**

Dicari $y^T Ax$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} x_1 & + & 3x_2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 \end{bmatrix} \\ &= y_1(\, x_1 + 3x_2) + y_2(2x_1 + 4x_2)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) maka didapat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\,(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\,(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & + & 2y_2 \\ 3y_1 & + & 4y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= A^T\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

Jika matriks $A$ adalah simetri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.6}$$

Untuk memahami Persamaan (2.6), maka diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.3:**

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian:**

Dicari $x^T Ax$ sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1(2x_1 + 4x_2) + x_2(4x_1 + 6x_2) \\
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 8x_2 \\ 8x_1 & + & 12x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

## 2.2 Bentuk Kuadratik

Diberikan bentuk umum persamaan kuadratik sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}, \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk persamaan kuadratik dengan $n$ variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ untuk $i \leq j,\ j \leq n$ dan $c_{ij} \epsilon \mathbb{R}$. Bentuk kuadratik (2.7) dapat diubah ke bentuk sebagai berikut:

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} c_{ij}x_i x_j \tag{2.8}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan matriks $A$ adalah matriks yang simetri. Selanjutnya untuk memahami bentuk di atas, maka diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.4:**

Jabarkan notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_i x_j$$

**Penyelesaian:**

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_i x_j &= \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_i x_1 + c_{i2}x_i x_2\} \\
&= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 \\
&= c_{11}{x_1}^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}{x_2}^2 \\
&= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} & x_1c_{12} + x_2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif ataukah definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks $A$. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh Lewis (1995) yaitu jika $A$ matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks $A$, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika semua nilai eigen $\lambda_i > 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$
2. Semidefinit positif jika semua nilai eigen $\lambda_i \geq 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$, dan paling tidak salah satu darinya nol.
3. Definit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$
4. Semidefinit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan paling tidak salah satu darinya nol.

jika matriks $A$ tidak memenuhi keempat syarat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite*.

**Contoh 2.5:**

Diberikan bentuk kuadratik $X^T AX$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$, akan ditentukan sifat definit dari matriks $A$.

**Penyelesaian:**

Untuk menentukan sifat definit,dicari nilai eijen dari matriks $A$ dengan langkah-langkah berikut:

$$\det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 8 & 0 \\ 0 & \lambda - 14 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda - 14) - 0 = 0$$

$$\lambda^2 - 22\lambda + 112 = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda - 14) = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1 = 8 \ \text{ dan } \lambda_2 = 14$$

karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan bentuk kuadratik memiliki sifat definit positif.

## 2.3 Persamaan Lyapunov

Berdasarkan Lewis (1995) diberikan persamaan Lyapunov waktu diskrit

$$S_k = A^T S_{k+1} A + Q, \tag{2.9}$$

Dimana matriks $S$,$Q$ simetri dan definit positif, dalam menyelesaikan permasalahan persamaan diatas dapat dilakukan dengan cara menghitung mundur. Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.6:**

Tentukan solusi dari $S_k$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_{k+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian:**

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas, dapat dilakukan dengan cara menghitung mundur dari $k = 5$ sampai $k = 1$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 59 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 16 & 235 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 16 & 235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 32 \\ 32 & 939 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 32 \\ 32 & 235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 64 \\ 64 & 3755 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Kestabilan Sistem Diskrit

Berdasarkan Ogata (1995) diberikan teorema tentang kestabilan sistem dinamik waktu diskrit.

**Teorema 2.4 (Ogata, 1995)** diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k, \tag{2.10}$$

Dengan $x_k$ adalah vektor *state* dan $A$ adalah matriks non singular $n\,x\,n$, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks $S$ simetri dan definit positif dengan matriks $Q$ adalah matriks simetri dan definit positif, Dan dikatakan stabil jika terdapat matriks $S$ simetri dan semidefinit positif dengan matriks $Q$ adalah matriks simetri dan semidefinit positif yang memenuhi:

$$A^T S A - S = -Q, \tag{2.11}$$

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

**Contoh 2.7:**

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

**Penyelesaian:**

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks $Q$ adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut:

$$A^T S A - S = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} - s_{22} \\ -1.5s_{12} - s_{22} & 0.25s_{11} + s_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut:

$$s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} - s_{22} = 0$$

$$0.25s_{11} + s_{12} = -1$$

Sehingga didapatkan nilai $s_{11} = 4,\ s_{12} = -2,\ s_{22} = 3$ dan dapat dibentuk menjadi:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks $S$ adalah matrik definit positif sebagai berikut:

$$\det\ (\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1.44 \text{ dan } \lambda_2 = 5.56$$

dari matriks di atas didapat: $\lambda_1 = 1.44$ , dan $\lambda_2 = 5.56$, karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

## 2.5 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada sub bab ini dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit dan akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit, kemudian dilanjutkan membahas tentang kendali linier kuadratik dengan umpan balik loop tertutup.

### 2.5.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan dinamik bentuk umum untuk masalah kendali optimal waktu diskrit sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \qquad (2.12)$$

dengan kondisi awal $x_0$, dengan $x_k$ adalah vektor berukuran $n$ dan kontrol input $u_k$ adalah vektor berukuran *m.*

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J}_i = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k (x_{k,} u_k) \qquad (2.13)$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton: $$H_k = L_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T f_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \qquad (2.14)$$

Persamaan *state* : $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}}, \qquad (2.15)$$

Persamaan *kostate* : $$\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \qquad (2.16)$$

Kondisi *stasioner* : $$0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \qquad (2.17)$$

### 2.5.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit Lingkar Tertutup

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik, didefinisikan persamaan dinamik sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \qquad (2.18)$$

dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ dan $u_k \in \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut dengan interval waktu [0,N]:

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(\chi_k^T Q x_k + u_k^T R u_k), \qquad (2.19)$$

Asumsikan $Q, R$, dan S adalah matriks simetri semidefinite positif.

Persamaan Hamilton : $H_k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k),$ (2.20)

Kemudian persmaan (2.20) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k,$ (2.21)

Persamaan *costate* : $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = Q\boldsymbol{x}_k + A^T \lambda_{k+1},$ (2.22)

Kondisi satsioner : $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R\boldsymbol{u}_k + B^T \lambda_{k+1},$ (2.23)

Menurut persamaan (2.23) diperoleh:

$$\boldsymbol{u}_k = -R^{-1} B^T \lambda_{k+1}, \qquad (2.24)$$

Kemudian persamaan (2.24) subtitusikan ke persamaan (2.21):

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1}B^T \lambda_{k+1}, \qquad (2.25)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) ambil $J_{N-1}$ dengan $\boldsymbol{u}_k = 0$ maka:

$$J_{N-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{x}_{N-1}^T Q \boldsymbol{x}_{N-1}, \qquad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.21) dengan $\boldsymbol{u}_k = 0$ maka:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k, \qquad (2.27)$$

Berdasarkan persamaan (2.27) ambil untuk $N = k + 1$ maka:

$$\boldsymbol{x}_N = A\boldsymbol{x}_{N-1}, \qquad (2.28)$$

Selanjutnya persamaan (2.28) ditransposekan maka diperoleh:

$$\boldsymbol{x}_N^T = \boldsymbol{x}_{N-1}^T A^T, \qquad (2.29)$$

Selanjutnya persamaan (2.28) dan persamaan (2.29) disubstitusikan ke persamaan (2.26) maka diperoleh:

$$J_{N-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{N-1}^T A^T) S_N (A\boldsymbol{x}_{N-1}) + \boldsymbol{x}_{N-1}^T Q \boldsymbol{x}_{N-1}$$

$$J_{N-1} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_{N-1}^T (A^T S_N A + Q)\boldsymbol{x}_{N-1}, \qquad (2.30)$$

Selanjutnya berdasarkan Lewis (1995) diambil fungsi tujuan untuk waktu ke *N* maka diperoleh:

$$J_N = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N, \qquad (2.31)$$

Kemudian untuk *N=N-1* maka persamaan (2.31) menjadi:

$$J_{N-1} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_{N-1}^T S_{N-1} \boldsymbol{x}_{N-1}, \qquad (2.32)$$

Berdasarkan persamaan (2.30) dan persamaan (2.32) maka diperoleh:

$$S_{N-1} = A^T S_N A + Q, \qquad (2.33)$$

Berdasarkan persamaan (2.33) diambil $k = N - 1$ maka diperoleh:

$$S_k = A^T S_{k+1} A + Q, \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.34) merupakan persamaan Lyapunov. Persamaan Lyapunov tersebut akan dicari solusi $S_k$ kemudian dari persamaan (2.22) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut dimana:

$$\lambda_{k+1} = (A^T)^{-1}(\lambda_k - Q\boldsymbol{x}_k), \qquad (2.35)$$

Selanjutnya $\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k$ maka persamaan (2.35) menjadi:

$$\lambda_{k+1} = (A^T)^{-1}(S_k \boldsymbol{x}_k - Q\boldsymbol{x}_k)$$

$$= (A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \qquad (2.36)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.36) ke persamaan (2.24) menjadi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_k &= -R_X^{-1}B^T\lambda_{k+1}\\ &= -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k,\end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.6 Persamaan Dinamik Diskrit Dengan Pemberian Diskon

Pada bagian ini akan diberikan bentuk persamaan sistem dinamik dengan pemberian faktor diskon. Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh (Gaitsgory dkk, 2016)

didefinisikan $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \sqrt{\beta^k}\,\boldsymbol{x}_k$ dan $\widehat{\boldsymbol{u}}_k = \sqrt{\beta^k}\,\boldsymbol{u}_k$ , maka persamaan (2.15) menjadi:

$$\sqrt{\beta^{k+1}}\,x_{k+1} = \sqrt{\beta^{k+1}}\,(A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k) \tag{2.33}$$

Maka:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta}\,A\sqrt{\beta^k}\boldsymbol{x}_k + \sqrt{\beta}\,B\sqrt{\beta^k}\boldsymbol{u}_k$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta}\,A\widehat{\boldsymbol{x}}_k + \sqrt{\beta}\,B\widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{2.34}$$

maka diperoleh fungsi dinamik dengan faktor diskon (2.34) dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widehat{x}_k \in \mathbb{R}^n$, dan fungsi kendali $\widehat{u}_k \in \mathbb{R}^n$**.** Selanjutnya fungsi tujuan setelah pemberian faktor diskon menurut Gaitsgory dkk (2016) diperoleh sebagai berikut:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\beta^k}(x_k^T Q\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R\boldsymbol{u}_k) \tag{2.35}$$

Selanjutnya fungsi tujuannya menjadi sebagai berikut:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k^T Q\widehat{\boldsymbol{x}}_k + \widehat{\boldsymbol{u}}_k^T R\widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{2.36}$$