BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini adalah deret Taylor, orde hampiran, orde konvergensi, metode Newton dan konvergensinya, metode Householder dan konvergensinya.

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial, yang mana koefisien polynomial tersebut bergantung pada turunan fungsi pada titik yang bersangkutan. Berikut diberikan teorema mengenai deret Taylor.

Teorema 2.1 (Martono, 1986) Misalkan f adalah suatu fungsi yang memenuhi syarat yaitu f mempunyai turunan ke-n yang kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan f mempunyai turunan ke-$n+1$pada selang terbuka (a,b). Oleh karena $c \in (a,b)$ sehingga

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{2.1}$$

Bukti: Definisikan fungsi F dan G sebagai berikut.

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{2.2}$$

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{2.3}$$

Jelas bahwa $F(b) = 0$ dan $G(b) = 0$.

Selanjutnya kita turunkan fungsi $F(x)$ dan $G(x)$ diperoleh

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{2.4}$$

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n . \tag{2.5}$$

Fungsi F dan G memenuhi semua syarat Teorema nilai rata-rata Cauchy pada selang tertutup $[a,b]$, yaitu:

1. F dan G kontinu pada selang tertutup $[a,b]$.
2. F dan G mempunyai turunan pada selang terbuka (a,b).
3. $G'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Oleh karena itu, menurut Teorema nilai rata-rata Cauchy ada $c \in (a,b)$ sehingga

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}. \tag{2.6}$$

Substitusikan semua nilai yang telah didapat sebelumnya diperoleh

$$F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)}G(a) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n\left[-\frac{n!}{(b-c)^n}\right]\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{2.7}$$

Selanjutnya, kita ganti nilai $F(a)$ pada fungsi F diperoleh

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots$$

$$- \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \tag{2.8}$$

sehingga hasil yang didapat adalah

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Jadi, terbuktilah teorema pada Persamaan (2.1). Jika b pada Persamaan (2.1) diganti dengan x, maka diperoleh

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (2.9)$$

Deret taylor juga dapat ditulis

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2.10)$$

dengan

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (2.11)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (2.12)$$

dengan c terletak diantara a dan x.

Contoh 2.1: Gunakan deret Taylor orde empat di sekitar $x_0 = 1$ untuk menghampiri $\ln(0{,}9)$.

Penyelesaian:

Tentukan turunan fungsi $f(x) = \ln x$ terlebih dahulu.

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

oleh karena $x_0 = 1$, sehingga didapat nilai fungsinya

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6$$

dengan menggunakan deret Taylor kita dapatkan

$$\ln x = 0 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!}(-1) + \frac{(x-1)^3}{3!}(2) + \frac{(x-1)^4}{4!}(-6) + R_4(x)$$

untuk $\ln(0{,}9)$ diperoleh

$$\ln(0{,}9) = (-0{,}1) - \frac{1}{2}(-0{,}1)^2 + \frac{1}{3}(-0{,}1)^3 - \frac{1}{4}(-0{,}1)^4 + R_4(x)$$

$$\approx -0{,}105358.$$

Jadi, untuk nilai hampiran dari $\ln(0{,}9)$ adalah $-0{,}105358$.

2.2 Orde Hampiran

Pada sebuah fungsi, terdapat fungsi-fungsi yang rumit dimana fungsi tersebut sulit untuk disederhanakan bentuk penyelesaiannya. Satu cara untuk mengungkapkan tingkat ketelitian penghampiran itu adalah dengan menggunakan notasi *O*-Besar (*Big-O*).

Definisi 2.1 (Munir, 2003) Misalkan nilai fungsi $f(h)$ dihampiri oleh fungsi $p(h)$. Jika $|f(h)-p(h)| \le K|h^n|$ dengan K merupakan konstanta riil dan $K > 0$, maka dapat dikatakan $p(h)$ menghampiri fungsi $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ sehingga dapat ditulis

$$f(h) = p(h) + O(h^n), \tag{2.13}$$

dengan $O(h^n)$ merupakan orde error dari penghampiran suatu fungsi.

Pada umumnya, karena h cukup kecil yaitu kurang dari 1, maka semakin tinggi nilai n, galat atau *error* akan semakin kecil sehingga semakin teliti penghampiran fungsinya. Contohnya pada metode yang berorde $O(h^2)$ akan lebih teliti hasilnya dari pada metode berorde $O(h)$.

Umumnya, deret Taylor sering digunakan untuk menghampiri nilai dari suatu fungsi.

Misalkan

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

dengan $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ adalah titik-titik selebar h, maka hampiran fungsi $f(x_{n+1})$ dengan deret Taylor di sekitar x_n adalah

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1}-x_n)f'(x_n) + \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{2!}f''(x_n) + \cdots + \frac{(x_{n+1}-x_n)^n}{n!}f^n(x_n) + R_n(x_{n+1})$$

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2!}f''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_n) + R_n(x_{n+1}), \tag{2.14}$$

yang mana

$$R_n(x_{n+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$= O(h^{n+1}), \; x_n < t < x_{n+1} \qquad (2.15)$$

sehingga didapat

$$f(x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{k} \frac{h}{n!} f^{(n)}(x_n) + O(h^{n+1}). \qquad (2.16)$$

Persamaan (2.16) menyatakan bahwa jika fungsi $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor derajat *n*, maka suku sisanya cukup dinyatakan dengan $O(h^{n+1})$. Pada suku sisa yang digunakan di dalam notasi *O*-besar adalah suku yang dimulai dengan perpangkatan h^{n+1}.

2.3 Orde Konvergensi

Metode iterasi memiliki suatu tingkat percepatan dalam menghampiri akar-akar persamaan pada suatu fungsi. Tingkat percepatan tersebut adalah orde konvergensi. Percepatan tersebut dapat di lihat dari banyaknya iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan pada suatu fungsi. Maka untuk lebih jelasnya, akan diberikan beberapa definisi yang dapat mendeskripsikan tentang orde konvergensi.

Definisi 2.2 (Sharma, *et al.*, 2011) Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan misalkan $\{x_n\}_{n\in N}$ adalah sebuah barisan bilangan riil untuk $n \geq 0$, konvergen menuju α. Kemudian, dinyatakan bahwa orde konvergensi dari deret adalah p, jika terdapat sebuah $p \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (2.17)$$

Jika nilai dari $p = 2$ atau $p = 3$, maka metode iterasinya memiliki orde konvergensi dua, atau tiga.

Definisi 2.3 (Sharma, *et al.*, 2011) Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan galat pada iterasi ke-n, maka galat iterasi ke-$(n+1)$ didefinisikan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}). \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) adalah persamaan tingkat kesalahan atau persamaan galat untuk setiap metode iterasi. Jika persamaan galat ini dapat ditentukan untuk sembarang metode iterasi, maka nilai p disebut sebagai orde kekonvergenan.

Sebagai contoh, metode Newton memiliki persamaan galat $e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$. Berdasarkan galat tersebut, diperoleh nilai p=2, maka berdasarkan Definisi 2.3 dapat disimpulkan bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua.

Menentukan orde konvergensi juga dapat dilakukan dengan menggunakan *computational order of convergence* atau yang sering disingkat dengan COC. Untuk memastikan bahwa orde konvergensi yang diperoleh dari metode iterasi sudah tepat maka dilakukan perbandingan terhadap hampiran akar-akar dari sebuah fungsi $f(x)$. Salah satu metode yang digunakan yaitu *computational order of convergence* (COC). Berikut ini akan dijelaskan definisi tentang *computational order of convergence* (COC)

Definisi 2.4 (Sharma, *et al.*, 2011) Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_n dan x_{n+1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α. Kemudian, *Computational Order of Convergence* (*COC*) yang dilambangkan dengan ρ dapat ditaksir menggunakan rumus

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k. \quad (2.19)$$

Contoh 2.3: Diketahui fungsi nonlinier $f(x) = x^4 + 4x^3 - 15$ dengan $\alpha \approx 1{,}405264582398863$ dan $x_0 = 1{,}00000000$. Tunjukkan bahwa metode Newton berkonvergensi kuadratik dengan menggunakan cara *Computational Order of Convergence* (COC) dengan ketelitian $\varepsilon = 10^{-10}$ dan digit 100.

Penyelesaian:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 15$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$$

Subsitusikan $x_0 = 1{,}00000000$ ke Persamaan (1.2), sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 1{,}00000000 - \frac{(-10{,}0000000)}{16{,}00000000}$$

$$x_1 \approx 1{,}62500000$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh $x_2 \approx 1{,}43796478$, $x_3 \approx 1{,}40611942$, $x_4 \approx 1{,}40526518$ dan $x_5 \approx 1{,}40526458$. Selanjutnya dengan menggunakan lima iterasi awal yaitu x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5, akan ditentukan orde konvergensi yang diteliti menggunakan nilai iterasi dengan rumus yang diberikan pada persamaan (2.25), dan diperoleh

$$\rho_1 \approx \frac{\ln\left|(x_2 - \alpha)/(x_1 - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_1 - \alpha)/(x_0 - \alpha)\right|}$$

$$\rho_1 \approx \frac{\ln\left|(1{,}43796478 - 1{,}40526458)/(1{,}62500000 - 1{,}40526458)\right|}{\ln\left|(1{,}62500000 - 1{,}40526458)/(1{,}00000000 - 1{,}40526458)\right|}$$

$$\rho_1 \approx 3{,}112226$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh $\rho_2 \approx 1{,}912937$, $\rho_3 \approx 1{,}991555$ dan $\rho_4 \approx 1{,}999885$. Selanjutnya untuk hasil COC dapat dilihat pada Tabel 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Hasil *COC* Metode Newton dengan akar persamaan

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	COC
1	1,62500000	6,25000000e-01	2,19735418e-01	-
2	1,43796478	1,87035223e-01	3,27001945e-02	3,112226
3	1,40611942	3,18453585e-02	8,54836055e-04	1,912937

4	1.40526518	8,54233615e-04	6,02440244e-07	1,991555
5	1,40526458	6,02439945e-07	2,99460619e-13	1,999885

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa nilai *Computational Order of Convergence* (COC) konvergen 2. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode Newton adalah dua atau kuadratik.

2.4 Indeks Efisiensi

Indeks efisiensi adalah parameter yang mengukur kinerja atau peforma suatu metode iteratif dengan melihat kombinasi orde konvergensi dan banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan pada suatu langkah iterasi. Pengertian indeks efisiensi diberikan pada Definisi 2.5 berikut.

Definisi 2.5 (Epperson, 2013) Indeks efisiensi merupakan definisi yang sederhana, yaitu

$$I = \rho^{1/r}, \tag{2.20}$$

dimana ρ adalah banyaknya orde dari sebuah metode, sedangkan r merupakan jumlah dari evaluasi fungsi dari metode tersebut termasuk juga fungsi turunannya. Semakin besar nilai indeksnya berarti semakin bagus persamaan orde konvergensinya.

Nilai indeks efisiensi menunjukkan seberapa efektifnya sebuah metode dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Semakin besar nilai indeks efisiensi, maka semakin efektif metode tersebut.

Sebagai contoh, metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, maka nilai indeks efisiensi metode Newton adalah $2^{1/2} \approx 1{,}4142$. Sedangkan, metode Chebyshev memiliki orde konvergensi tiga dan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$, maka nilai indeks efisiensi metode Chebyshev adalah $3^{1/3} \approx 1{,}4422$.

2.5 Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Metode ini merupakan salah satu metode klasik yang sering digunakan untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear. Misalkan fungsi f dapat diekspansi disekitar $x = x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi disekitar $x = x_n$ sampai orde satu, maka diperoleh:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) \tag{2.21}$$

Oleh karena $f(x) = 0$, dengan mengambil $x = x_{n+1}$ sehingga Persamaan (2.19) menjadi:

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) \tag{2.22}$$

Setelah disederhanakan maka diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \text{ dan } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Persamaan (2.23) merupakan rumus metode Newton.

Teorema 2.2 Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi terdiferensial $f : I \to \mathbb{R}$ untuk suatu interval terbuka I. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari $f(x) = 0$. Jika x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.23) mempunyai orde konvergensi dua dan memenuhi persamaan *galat*:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3) \tag{2.24}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!} \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Bukti: Misalkan $\alpha \in I$ dimana α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$ dengan $j \geq 1$, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f^{(i)}(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f^{(ii)}(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f^{(iii)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots$$

Oleh karena $e_n = x_n - \alpha$ dan $f(\alpha) = 0$ diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \qquad (2.25)$$

Berdasarkan Persamaan (2.22) diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \qquad (2.26)$$

Selanjutnya, Persamaan (2.25) dibagi dengan Persamaan (2.26) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))},$$

$$= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)},$$

maka dengan menggunakan deret geometri diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + O(e_n^3). \qquad (2.27)$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (2.27) ke Persamaan (2.23) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2e_n^2 + O(e_n^3)).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh:

$$e_{n+1} = c_2e_n^2 + O(e_n^3). \qquad (2.28)$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan *error* metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik.

2.6 Metode Householder dan Orde Konvergensinya

Pandang metode Householder (Householder, 1970) dalam bentuk sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2}{2f'(x_n)^3}f''(x_n) \qquad (2.29)$$

Persamaan (2.29) melibatkan suatu fungsi *f*, satu turunan pertama dengan satu evaluasi turunan kedua *f* masing-masing adalah $f(x_n)$, $f'(x_n)$, dan $f''(x_n)$,.

Selanjutnya, akan membahas mengenasi error metode Householder yang menunjukkan orde Konvegensinya.

Teorema 2.3 (Householder, 1970) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya pada interval (a,b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.29) memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = -c_3 e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.30}$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan bahwa $x_n = \alpha + e_n$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2,3,\ldots$. Selanjutnya diaproksimasikan fungsi f disekitar x_n dengan menggunakan deret Taylor, diperoleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.31}$$

Selanjutnya, diekspansikan fungsi $f'(x_n)$ disekitar α dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{2.32}$$

Dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar α menghasilkan:

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^2)). \tag{2.33}$$

Jika Persamaan (2.32) dikubikkan maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x_n)^3 &= \left(f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right)^3 \\ &= f'(\alpha)^2\left(1 + 8c_2 e_n + (9c_3 + 12c_2^2)e_n^2 + 36c_2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Selanjutnya jika Persamaan (2.31) dibagi dengan Persamaan (2.34) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)^3} &= \frac{f'(\alpha)^2\left(e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)^2\left(1 + 8c_2 e_n + (9c_3 + 12c_2^2)e_n^2 + 36c_2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)} \\ &= \frac{\left(e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 8c_2 e_n + (9c_3 + 12c_2^2)e_n^2 + 36c_2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)} \end{aligned}$$

Misalkan $t = 8c_2 e_n + (9c_3 + 12c_2^2)e_n^2 + 36c_2 c_3 e_n^3 + O(e_n^4)$ dengan menggunakan deret Geometri:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

diperoleh:

$$\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)^3} = e_n^2 - 16c_2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.35}$$

Dengan mempertimbangkan Persamaan (2.29), maka:

$$\frac{f(x_n)^2}{2f'(x_n)^3} f''(x_n) = c_2 e_n^2 + (3c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.36}$$

Jika Persamaan (2.27) dikurang dengan persamaan (2.36) diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2}{2f'(x_n)^3} f''(x_n) &= \left(e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \\ &\quad - \left(c_2 e_n^2 + (3c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \\ &= e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4))\end{aligned} \tag{2.37}$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.37) ke dalam Persamaan (2.29) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)) \,. \tag{2.38}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, maka:

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4))) \,,$$

atau

$$e_{n+1} = (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)) \,. \blacksquare \tag{2.39}$$

Persamaan (2.39) merupakan persamaan galat metode Householder yang menunjukkan bahwa metode Householder memiliki orde konvergensi kubik.