BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam landasan teori ini akan diperlihatkan teori-teori yang akan digunakan dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Adapun teori-teori tersebut sebagai berikut:

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 2000) Sebuah matriks A adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Jika A adalah sebuah matriks, maka dapat dituliskan dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana m bilangan ke arah horizontal disebut sebagai baris dari matriks A dan n bilangan ke arah vertical disebut sebagai kolom dari matriks A. Elemen-elemen a_{ij} yang disebut entri ij terletak pada baris ke i dan kolom ke j. Biasanya matriks seperti ini ditulis seperti $A_{m\times n} = [a_{ij}]$. Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan ordo, yaitu banyaknya baris dan kolom dalam matriks tersebut. Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam operasi-operasi antar matriks.

Matriks mempunyai beberapa jenis antara lain sebagai berikut:

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar merupakan matriks dimana jumlah baris dan kolomnya sama atau matriks $n \times n$. Matriks bujur sangkar ini berordo n.

Contoh 2.1:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar ordo 2×2

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar ordo 3×3

c. $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar ordo 4×4

2. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen diluar diagonal utamanya adalah nol.

Contoh 2.2:

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal berordo 3×3

b. $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal berordo 4×4

3. Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Robert, 2005) sebuah matriks toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0, 1, \ldots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.1 maka terdapat berbagai jenis dari matriks toeplitz. Salah satu jenis dari matriks toeplitz adalah matriks toeplitz bentuk khusus.

Contoh 2.3:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks toeplitz berordo 4×4

2.2 Determinan Matriks Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor

Determinan matriks hanya dimiiki oleh matriks persegi. Determinan matriks digunakan ketika mencari invers matriks dan ketika menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan aturan *cramer*. Determinan dari matriks A dapat ditulis $det(A)$ atau $|A|$. Jika nilai determinan itu nol, matriks bujur sangkar tersebut singular, artinya tidak memiliki invers. Jika nilai determinan suatu matriks tidak nol, berarti matriks A tersebut nonsingular, yaitu matriks tersebut mempunyai invers.

Definisi 2.3 (Howard Anton, 2000) Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita defenisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) kita namakan determinan A.

Untuk menghitung nilai determinan memiliki beberapa cara salah satunya dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.4 (Howard Anton, 2000) Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor anggota a_{ij}.

Contoh 2.7:

1. Hitunglah minor dan kofaktor a_{11} dan a_{23} dari matriks tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk minor a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 29$$

Untuk minor a_{23} adalah

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Sedangkan untuk kofaktor a_{11}

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 29$$

Dan kofaktor a_{23} adalah

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = 5$$

Perhatikan bahwa minor dan kofaktor dari suatu elemen a_{ij} hanya berbeda tanda yaitu, $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Ada cara yang cepat untuk menentukan apakah harus menggunakan + atau – dengan menggunakan papan periksa berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Misalnya, $C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{31} = M_{31}$ dan seterusnya.

Tinjau matriks umum 3×3 berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas dengan menggunakan jembatan keledai (mnemonic) akan menghasilkanpersamaan sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.1)$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \quad (2.2)$$

Karena persamaan (2.1) yang ada didalam kurung merupakan kofaktor C_{11}, C_{21}, C_{31} maka didapatkan persamaan

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.1) diatas juga dapat menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Persamaan (2.3) dan (2.4) diatas merupakan perluasan kofaktor dari $\det(A)$.

Teorema 2.1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan suatu matriks $A_{n\times n}$ bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

1. $det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$, perluasan kofaktor disepanjang kolom ke-j.
2. $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$, perluasan kofaktor disepanjang baris ke-i.

Contoh 2.8:

Hitunglah determinan matriks $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ menggunakan ekspansi kofaktor kolom pertama dan ekspansi kofaktor baris pertama.

Penyelesaian:

Nilai determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor kolom pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3(25-0) - 2(0-0) - 1(0-35) \\ &= -75 + 35 = 40 \end{aligned}$$

Nilai determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\det(A) &= -3\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ &= -3(25-0) - 0 + 7(0+5)\\ &= -75 + 35 = 40\end{aligned}$$

2.3 Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal Menggunakan Metode Adjoin

Dalam sebuah makalah yang dibahas oleh Aryani dan Marzuki dengan judul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Tridiagonal Menggunakan Metode Adjoin". Dalam makalah ini membahas tentang bagaimana mencari rumusan umum invers dari matriks toeplitz tridiagonal. Bentuk umum dari matriks toeplitz tridiagonal adalah:

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Dalam mencari rumusan umum invers matriks toeplitz tridiagonal, hal pertama yang dilakukan penulis tersebut adalah mencari nilai determinan. Untuk memperoleh nilai determinan matriks toeplitz tridiagonal dilakukan dengan mengamati pola determinan matriks toeplitz tridiagonal A yang berorde 3×3 hingga 20×20. Setelah dilihat pola dari nilai determinannya diperoleh bentuk umum determinan dari Persamaan (2.5) tersebut yang disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 2.1: Diberikan A_n suatu matriks toeplitz tridiagonal berordo $n \geq 3$ pada Persamaan (2.5) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} ia^2b^{n-4}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-5} i\right)a^3b^{n-6}c^3$$

$$+\left[\frac{(n-7)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(n-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\frac{(n-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{n-7} i\right]a^4b^{n-8}c^4$$

$$-\left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(n-10)(n-9)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{n-9} i\right]a^5b^{n-10}c^5$$

$$+\left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{n-11} i\right]$$

$a^6b^{n-12}c^6$

$$-\left[\begin{array}{c}\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i\\ +\cdots+1\sum_{i=1}^{n-13} i\end{array}\right]$$

$a^7b^{n-14}c^7+\cdots$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika.

1. Untuk $n=3$ maka berlaku

   $|A_3| = b^3-2abc+0$

   $\quad = b^3-2abc$,benar

2. Asumsikan untuk $n=k$ benar, yaitu

$$|A_k| = b^k-(k-1)ab^{k-2}c+\sum_{i=1}^{k-3} ia^2b^{k-4}c^2-\left(\sum_{i=1}^{1} i+\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+\sum_{i=1}^{k-5} i\right)$$

$a^3b^{k-6}c^3$

$$+\left[\frac{(k-7)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\frac{(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-7} i\right]a^4b^{k-8}c^4$$

$$-\left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-10)(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-9} i\right]a^5b^{k-10}c^5$$

$$+\left[\begin{array}{c}\dfrac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i+\dfrac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\displaystyle\sum_{i=1}^{2} i+\cdots \\ +1\displaystyle\sum_{i=1}^{k-11} i\end{array}\right]$$

$$a^6b^{k-12}c^6$$

$$-\left[\begin{array}{c}\dfrac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i+\dfrac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!}\displaystyle\sum_{i=1}^{2} i \\ +\cdots+1\displaystyle\sum_{i=1}^{k-13} i\end{array}\right]$$

$$a^7b^{k-14}c^7+\cdots$$

3. Akan ditunjukan untuk $n=k+1$ juga benar,

$$|A_{k+1}|=b^{k+1}-(k)ab^{k-1}c+\sum_{i=1}^{k-2} ia^2b^{k-3}c^2-\left(\sum_{i=1}^{1} i+\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+\sum_{i=1}^{k-4} i\right)$$

$$a^3b^{k-5}c^3$$

$$+\left[\frac{(k-6)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-7)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-6} i\right]a^4b^{k-7}c^4$$

$$-\left[\frac{(k-8)(k-7)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-9)(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-8} i\right]a^5b^{k-9}c^5$$

$$+\left[\frac{(k-10)(k-9)(k-8)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-10} i\right]$$

$a^6b^{k-11}c^6$

$$-\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)(k-9)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-12} i\right]$$

$a^7b^{k-13}c^7+\cdots$

Selanjutnya dibuktikan sebagai berikut:

Perhatikan bahwa

$|A_{k+1}| = b|A_k| - ac|A_{k-1}|$

$$= b^{k+1}-(k-1)ab^{k-1}c+\sum_{i=1}^{k-3} i\,.\,a^2b^{k-3}c^2-\left(\sum_{i=1}^{1} i+\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+\sum_{i=1}^{k-5} i\right)$$

$$a^3b^{k-5}c+a^3b^{k-5}c^3\left[\frac{(k-7)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\frac{(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-7} i\right]$$

$$a^4b^{k-7}c^4-\left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-10)(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-9} i\right]a^5b^{k-9}c^5$$

$$+\left[\frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots +1\sum_{i=1}^{k-11} i\right]a^6b^{k-11}c^6$$

$+\cdots+$

$$\left[\begin{array}{c}\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i \\ + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-13} i\end{array}\right]$$

$a^7b^{k-13}c^8 + \cdots$

$$-ac\left\{\begin{array}{c} b^{k-1} - (k-2)ab^{k-3}c + \sum_{i=1}^{k-4} i\,.\,a^2b^{k-5}c^2 \\ -\left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-6} i\right)a^3b^{k-7}c^3\left[\frac{k-8}{1!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{k-9}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + (k-10)\sum_{i=1}^{3} i + \cdots \sum_{i=1}^{k-8} i\right] \\ a^4b^{k-9}c^4 - \left[\frac{(k-10)(k-9)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-10} i\right]a^5b^{k-11}c^5 \\ +\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-12} i\right] \\ a^7b^{k-15}c^7 + \cdots \end{array}\right\}$$

$$= b^{k+1} - (k-1)ab^{k-1}c + \sum_{i=1}^{k-3} i\,.\,a^2b^{k-3}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-5} i\right)a^3b^{k-5}c^3 +$$

$$a^3b^{k-5}c^3\left[\frac{k-7}{1!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{k-8}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i + \cdots \sum_{i=1}^{k-7} i\right]a^4b^{k-7}c^4 -$$

$$\left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-10)(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-9} i\right]a^5b^{k-9}c^5 +$$

$$\left[\frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-11} i\right]$$

$a^6b^{k-11}c^6 + \cdots +$

$$\left[\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-13} i\right]$$

$a^7b^{k-13}c^8+\cdots$

$$-b^{k-1}.\,ac+(k-2)a^2b^{k-3}c^2-\sum_{i=1}^{k-4} i\,.\,a^3b^{k-5}c^3+\left(\sum_{i=1}^{1} i+\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+\sum_{i=1}^{k-6} i\right)$$

$$a^4b^{k-7}c^4-\left[\frac{k-8}{1!}\sum_{i=1}^{1} i+(k-9)\sum_{i=1}^{2} i+(k-10)\sum_{i=1}^{3} i+\cdots\sum_{i=1}^{k-8} i\right]a^5b^{k-9}c^5$$

$$+\left[\frac{(k-9)(k-10)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-11)(k-10)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-10} i\right]a^6b^{k-11}c^6-$$

$$\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-13)(k-12)(k-11)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-12} i\right]$$

$a^8b^{k-15}c^8$

Artinya kita dapatkan

$$=b^{k+1}-kab^{k-1}c-\sum_{i=1}^{k-2} i\,.\,a^2b^{k-3}c^2+\left(\sum_{i=1}^{1} i+\sum_{i=1}^{2} i+\cdots+\sum_{i=1}^{k-4} i\right)a^3b^{k-5}c^3$$

$$+\left[(k-6)\sum_{i=1}^{1} i+(k-7)\sum_{i=1}^{2} i+(k-8)\sum_{i=1}^{3} i+\cdots\sum_{i=1}^{k-6} i\right]a^4b^{k-7}c^4-$$

$$\left[\frac{(k-8)(k-7)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i+\frac{(k-9)(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i+\frac{(k-10)(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i+\cdots+1\sum_{i=1}^{k-8} i\right]$$

$$a^5b^{k-9}c^5 + \left[\frac{(k-10)(k-9)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-10} i\right]$$

$$a^6b^{k-11}c^6$$

$$-\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)(k-9)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{k-12} i\right]$$

$$a^8b^{k-13}c^8 + \cdots$$

Pembuktian berakhir. ■

2.4 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu cara untuk membuktikan suatu pernyataan atau proposisi dalam ilmu bidang matematika. Induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan serta menegaskan $p(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat positif n, dimana $p(n)$ adalah fungsi proposisi **(Kenneth, 2007).**

Prinsip induksi matematika

Untuk membuktikan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, kita harus membuktikan dua langkah berikut:

1. Langkah dasar

   Kita menunjukan $p(1)$ benar

2. Langkah induksi

   Asumsikan $p(k)$ benar maka akan dibuktikan $p(k+1)$ benar untuk semua bilangan bulat positif k.

Contoh 2.9:

Buktikan dengan induksi matematika bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

$p(n)$: $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 untuk $n \geq 1$

1. Akan ditunjukan untuk $n = 1$ maka $p(1)$ benar, yaitu:

   $p(1)$: $1^3 + 2.1 = 3$, 3 adalah kelipatan 3
2. Asumsikan untuk $n = k$, maka $p(k)$ benar, yaitu

   $p(k)$: $k^3 + 2k$ adalah kelipatan 3 untuk $k \geq 1$

   Sehingga akan dibuktikan untuk $n = k + 1$, maka $p(k + 1)$ juga benar, yaitu

   $p(k + 1)$: $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$

   Perhatikan hal berikut:

   $$\begin{aligned}(k+1)^3 + 2(k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2)\\ &= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3\\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)\end{aligned}$$

Karena $(k^3 + 2k)$ kelipatan 3 diasumsikan benar dan $3(k^2 + k + 1)$ juga kelipatan 3 maka $p(k + 1)$ benar.

Sehingga $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 untuk $n \geq 1$.