BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang landasan teori dari tugas akhir ini. Landasan teori adalah teori-teori dan materi-materi yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah yang diteliti dari tugas akhir ini. Adapun landasan teorinya sebagai berikut :

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Matriks menjadi teori dasar dalam menyelesaikan penelitian dalam tugas akhir ini. Adapun definisi dari matriks adalah sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Sebuah matriks dinotasikan dengan huruf besar seperti $A, B,$ atau X dan lain sebagainya. Sebuah matriks yang berukuran m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$.

Jenis-jenis matriks diantaranya:

1. Matriks Bujur Sangkar

   Matriks bujur sangkar yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Dalam matriks bujur sangkar ini dikenal istilah diagonal utama yaitu entri-entri yang mempunyai nomor baris sama dengan nomor kolom, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   Matriks diatas mempunyai orde n, dan ditulis A_n, sedangkan entri yang terletak pada diagonal utamanya adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

2. Matriks Tidak Bujur Sangkar

Matriks tidak bujur sangkar ($m \neq n$) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

dengan:

a_{ij} : elemen atau unsur matriks

i : 1, 2, 3, ..., m , indeks baris

j : 1, 2, 3, ..., n , indeks kolom

Matriks diatas juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal yaitu matriks bujur sangkar yang semua entri di luar diagonal utama bernilai nol, sebagai berikut :

$$\mathrm{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks diagonal dapat dibalik jika dan hanya jika seluruh entrinya pada posisi diagonal adalah bilangan taknol.

4. Matriks Satuan (Matriks Identitas)

Matriks satuan yaitu matriks diagonal yang entri-entri pada diagonal utamanya adalah bilangan satu dan entri-entri lainnya adalah bilangan nol. Matriks satuan ini dilambangkan dengan I_n, dimana n adalah orde dari matriks tersebut, sebagai berikut:

$$
\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai determinan matriks.

2.2 Determinan Matriks

Subbab ini akan membahas mengenai definisi dan teorema yang berhubungan dengan determinan matriks.

Definisi 2.2 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. ***Fungsi determinan*** *(determinant function)* dinotasikan dengan ***det*** dan kita mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut ***determinan dari A*** *(determinant of A).*

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar, antara lain metode ekspansi kofaktor, metode reduksi baris, dan metode Sarrus.

2.2.1 Metode Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan dengan ekspansi kofaktor, terlebih dahulu harus memahami istilah minor dan kofaktor.

Definisi 2.3 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka ***minor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai ***kofaktor dari entri*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Contoh 2.1:

Misalkan matriks,

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

maka minor a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

dan kofaktor dari entri a_{11} adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 10$$

Teorema 2.1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

1. Ekspansi sepanjang kolom ke-*j*

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

2. Ekspansi sepanjang baris ke-*i*

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Contoh 2.2:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga dari matriks.

Penyelesaian:

Karena entri a_{13} dan a_{23} adalah 0, maka hitung C_{33} dan C_{43} saja.

$$\begin{aligned} C_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} \\ &= M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \left(5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \left(5(16) + 2(24) + 2(0)\right) \end{aligned}$$

$$= (80 + 48 + 0)$$
$$= 128$$

dan

$$C_{43} = (-1)^{4+3} M_{43}$$
$$= -M_{43}$$
$$= -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -\left(5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -(5(-6) + 2(-9) + 0(0)$$
$$= -\big((-30) - 18 + 0\big)$$
$$= -(-48)$$
$$= 48$$

sehingga

$$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$$
$$= a_{13}(M_{13}) + a_{23}(-M_{23}) + a_{33}(M_{33}) + a_{43}(-M_{43})$$
$$= 0 - 0 + (-3)(128) + (3)(48)$$
$$= -384 + 144$$
$$= -240$$

Jadi, $\det(A) = -240$.

2.2.2 Metode Reduksi Baris

Gagasan dari metode ini adalah dengan mereduksi matriks yang diberikan menjadi bentuk segitiga atas melalui operasi baris elementer, kemudian menghitung determinan dari matriks segitiga atas, kemudian menghubungkan determinan tersebut dengan matriks aslinya (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004).

Teorema 2.2 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$.

1. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka $\det(B) = k\det(A)$.

2. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.
3. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika kelipatan dari suatu matriks A ditambahkan kebaris lainnya atau ketika dari satu kolom ditambahkan ke kolom yang lain, maka $\det(B) = \det(A)$.

Contoh 2.3:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode reduksi baris!

Penyelesaian:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faktor bersama yaitu 3 dari } b_1 \text{ dikeluarkan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \leftarrow b_2 \text{ dan } b_3 \text{ dipertukarkan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \leftarrow \text{2 kali } b_1 \text{ ditambahkan ke } b_2$$

$$= -(3)(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -{}^{1}\!/_{5} \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faktor bersama yaitu 5 dari } b_2 \text{ dikeluarkan}$$

$$= -(3)(5)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -{}^{1}\!/_{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faktor bersama yaitu } -2 \text{ dari } b_3 \text{ dikeluarkan}$$

$$= -\big((3)(5)(-2)\big)$$

$$= 30$$

Jadi, $\det(A) = 30$.

2.2.3 Metode Sarrus

Langkah-langkah untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar A dengan menggunakan metode Sarrus sebagai berikut (T. Sutojo dkk, 2010):

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua kemudian tempatkan di sebelah kanan tanda determinan.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama, dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(+)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$A(+) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(-)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$A(-) = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinan matriks A adalah selisih antara $A(+)$ dan $A(-)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Sehingga:

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Berikut diberikan contoh mengenai metode Sarrus:

Contoh 2.4:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode Sarrus!

Penyelesaian:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$= [(3)(0)(5) + (6)(-2)(-2) + (-9)(0)(1)] - [(-9)(0)(-2) + (3)(-2)(1) + (6)(0)(5)]$$

$$= (0 + 24 + 0) - (0 + (-6) + 3)$$

$$= 24 - (-6)$$

$$= 30$$

jadi, $\det(A) = 30$.

2.3 Sifat-sifat Determinan untuk Matriks Bujur Sangkar

Diberikan teorema-teorema mengenai sifat-sifat determinan untuk matriks bujur sangkar sebagai berikut:

Teorema 2.3 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.

1. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$
2. $\det(A) = \det(A^T)$.

Contoh 2.5:

1. Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$= (0+0+0) - (0+0+0)$$

$$= 0$$

jadi, $\det(A) = 0$

2. Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{dan } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \\ -9 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right.$$

$$= [(3)(0)(5) + (6)(-2)(-2) + (-9)(0)(1)] - [(-9)(0)(-2) + (3)(-2)(1) + (6)(0)(5)]$$

$$= (0 + 24 + 0) - (0 + (-6) + 3)$$

$$= 24 - (-6)$$

$$= 30$$

dan

$$\det(A^T) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ -9 & -2 & 5 & -9 & -2 \end{array}\right.$$

$$= [(3)(0)(5) + (0)(1)(-9) + (-2)(6)(-2)] - [(-2)(0)(-9) + (3)(1)(-2) + (0)(6)(5)]$$

$$= (0 + 0 + 24) - (0 + (-6) + 3)$$

$$= 24 - (-6)$$

$$= 30$$

Teorema 2.4 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar A dapat dibalik, jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Contoh 2.6:

Jika diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \big(0 + 0 + (-1)\big) - (0 + (-1) + 0)$$

$$= -1 - 1$$

$$= -2$$

$\det(A) = -2 \neq 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa matriks A dapat dibalik.

$$\left[I \middle| A^{-1}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_2 \Leftrightarrow b_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] b_3 + b_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] b_3 - b_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] 1/2 b_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] b_1 - b_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

sehingga

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

jadi, matriks A dapat dibalik, jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.5 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar dengan ukuran yang sama, maka:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Contoh 2.7:

Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$$= (0 + 24 + 0) - (0 + (-6) + 0)$$

$$= 24 + 6$$

$$= 30$$

dan

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \big(0 + 0 + (-1)\big) - (0 + 1 + 0)$$

$$= -1 - 1$$

$$= -2$$

sehingga

$$\det(A)\det(B) = (30)(-2)$$

$$= -60 \qquad (2.2)$$

Jika A dan B dikalikan:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \\ -3 & 6 \end{matrix}$$

$$= \big((-6) + 0 + 0\big) - (54 + 0 + 0)$$

$$= -6 - 54$$

$$= -60 \qquad (2.3)$$

Berdasarkan Persamaan (2.2) dan Persamaan (2.3) maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Teorema 2.6 (Maslen Sibarani, 2013) Suatu matriks persegi yang mempunyai dua baris atau dua kolom yang sama determinannya sama dengan 0 (nol).

Contoh 2.8:

Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

$$= (20 + (-8) + 12) - (20 + (-8) + 12)$$

$$= 24 - 24$$

$$= 0$$

2.4 Determinan Radic

Definisi 2.4 (Mirko Radic, 2005)

Determinan dari matriks A berukuran $m \times n$ dengan kolom $A_1, \dots, A_n$ dan $m \le n$:

$$\det(A) = \sum_{1 \le j1 < j2 < \cdots < jm \le n} (-1)^{r+s}\, det\left|A_{j1}, \dots, A_{jm}\right| \tag{2.4}$$

dengan $j_1, j_2, \cdots, j_m \in \{1,2,\cdots,n\}, r = 1 + 2 + \cdots + m$, dan $s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. Jika $m > n$, maka $\det(A) = 0$.

Berikut diberikan contoh mengenai determinan Radic.

Contoh 2.9:

Diketahui matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 2×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 2 - 2 - 1 + 11 - 4$$

$$= 8$$

Contoh 2.10:

Diketahui matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 3×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right) -$$

$$\left(\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix} \right)$$

$$= \big((8+0+12)-(18+0+5)\big) - \big((0+30+0)-(0+32+0)\big) +$$

$$\big((0+18+0)-(0+8+0)\big) - \big((0+24+0)-(0+10+0)\big)$$

$$= (20-23)-(30-32)+(18-8)-(24-10)$$

$$= -3-(-2)+10-14$$

$$= -5$$

2.5 Sifat –sifat Determinan untuk Matriks Tidak Bujur Sangkar

Secara umum, sifat-sifat determinan untuk matriks tidak bujur sangkar hampir sama dengan matriks bujur sangkar. Hal tersebut dapat ditinjau melalui teorema berikut.

Teorema 2.7 (Amiri, Fathy, Bayat, 2010) Jika suatu matriks A berordo $m \times n$ dengan $m \leq n$, maka:

1. Jika $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ maka $\det A = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$
2. Jika suatu matriks baris A dikalikan oleh λ, maka determinan yang diperoleh pada matriks baru adalah $\lambda \det A$.
3. Jika matriks A mempunyai dua baris yang identik maka $\det(A) = 0$.
4. Pertukaran dua baris di matriks tidak bujur sangkar A hanya mengubah tanda dari $\det(A)$.

Contoh 2.11:

1. Diketahui matriks baris dengan ukuran 1×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}|1| + (-1)^{1+2}|3| + (-1)^{1+3}|2| + (-1)^{1+1}|4| \\ &= |1| - |3| + |2| - |4| \\ &= 1 - 3 + 2 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 2 - 2 - 1 + 11 - 4$$

$$= 8$$

Dan

$$\det(A^*) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 4 - 4 - 2 + 22 - 8$$

$=16$

jadi, $\det A^{*} = 2\det A = 2(8) = 16.$

3. Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right) -$$

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right)$$

$$= \big((8+3+12)-(3+12+8)\big) - \big((4+1+4)-(1+4+4)\big) +$$

$$\big((12+3+8)-(3+8+12)\big) - \big((6+6+4)-(6+4+6)\big)$$

$$= (23-23) - (9-9) + (23-23) - (16-16)$$

$$= 0$$

4. Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}4&5&3\\1&2&0\\3&4&1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&2\\3&4&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&2\\3&1&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&2\\4&1&0\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix}4&5&3\\1&2&0\\3&4&1\end{vmatrix}\begin{matrix}4&5\\1&2\\3&4\end{matrix}\right) - \left(\begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&2\\3&4&0\end{vmatrix}\begin{matrix}4&5\\1&2\\3&4\end{matrix}\right) + \left(\begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&2\\3&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}4&3\\1&0\\3&1\end{matrix}\right) - \left(\begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&2\\4&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}5&3\\2&0\\4&1\end{matrix}\right)$$

$$= \big((8+0+12)-(18+0+5)\big) - \big((0+30+0)-(0+32+0)\big) + \big((0+18+0)-(0+8+0)\big) - \big((0+24+0)-(0+10+0)\big)$$

$$= (20-23)-(30-32)+(18-8)-(24-10)$$

$$= -3-(-2)+10-14$$

$$= -5$$

dan

$$\det(A^*) = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix}1&2&0\\4&5&3\\3&4&1\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix}1&2&2\\4&5&0\\3&4&0\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix}1&0&2\\4&3&0\\3&1&0\end{vmatrix}(-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix}2&0&2\\5&3&0\\4&1&0\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1&2&0\\4&5&3\\3&4&1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&2&2\\4&5&0\\3&4&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&0&2\\4&3&0\\3&1&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&0&2\\5&3&0\\4&1&0\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix}1&2&0\\4&5&3\\3&4&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\4&5\\3&4\end{matrix}\right) - \left(\begin{vmatrix}1&2&2\\4&5&0\\3&4&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\4&5\\3&4\end{matrix}\right) + \left(\begin{vmatrix}1&0&2\\4&3&0\\3&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\4&3\\3&1\end{matrix}\right) - \left(\begin{vmatrix}2&0&2\\5&3&0\\4&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}2&0\\5&3\\4&1\end{matrix}\right)$$

$$= \big((5+18+0)-(0+12+8)\big) - \big((0+0+32)-(30+0+0)\big) + \big((0+0+8)-(18+0+0)\big) - \big((0+0+10)-(24+0+0)\big)$$

$$= (23-20)-(32-30)+(8-18)-(10-24)$$

$$= 3-2+(-10)-(-14)$$

$$= 5$$

jadi, $\det(A^*) = -\det(A) = 5$.

Teorema 2.8 (Andi S, 2014) Jika matriks berukuran $m \times n$ dengan $m = 2$ maka determinannya adalah:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum (-1)^{(1+2)+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

Contoh 2.12:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 2 - 2 - 1 + 11 - 4$$

$$= 8$$

Lemma 2.1 (Amiri, Fathy, Bayat, 2010)

$$\det[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n \quad 0_m] = \det[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n]$$

dengan $m < n$, $A_k = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix}$ untuk $k \in \{1,2,\dots,n\}$, dan 0_m adalah matriks nol dengan ukuran $m \times 1$.

Contoh 2.13:

Diketahui sebagai berikut:

$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $0_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka

$$\det[A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad 0_3] = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix}4&5&3\\1&2&0\\3&4&1\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&2\\3&4&0\end{vmatrix}\\
&\quad +(-1)^{(1+2+3)+(1+2+5)}\begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&0\\3&4&0\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&2\\3&1&0\end{vmatrix}\\
&\quad +(-1)^{(1+2+3)+(1+3+5)}\begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&0\\3&1&0\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+4+5)}\begin{vmatrix}4&0&0\\1&2&0\\3&0&0\end{vmatrix}\\
&\quad +(-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&2\\4&1&0\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+5)}\begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&0\\4&1&0\end{vmatrix}\\
&\quad +(-1)^{(1+2+3)+(2+4+5)}\begin{vmatrix}5&0&0\\2&2&0\\4&0&0\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+5)}\begin{vmatrix}3&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}4&5&3\\1&2&0\\3&4&1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&2\\3&4&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&5&0\\1&2&0\\3&4&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&2\\3&1&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4&3&0\\1&0&0\\3&1&0\end{vmatrix}\\
&\quad + \begin{vmatrix}4&0&0\\1&2&0\\3&0&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&2\\4&1&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5&3&0\\2&0&0\\4&1&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&0&0\\2&2&0\\4&0&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{vmatrix}\\
&= \big((8+0+12)-(18+0+5)\big) - \big((0+30+0)-(0+32+0)\big)\\
&\quad +\big((0+0+0)-(0+0+0)\big) + \big((0+18+0)-(0+8+0)\big)\\
&\quad -\big((0+0+0)-(0+0+0)\big) + \big((0+0+0)-(0+0+0)\big)\\
&\quad -\big((0+24+0)-(0+10+0)\big) + \big((0+0+0)-(0+0+0)\big)\\
&\quad -\big((0+0+0)-(0+0+0)\big) + \big((0+0+0)-(0+0+0)\big)\\
&= (20-23)-(30-32)+0+(18-8)-0+0-(24-10)+0-\\
&\quad 0+0\\
&= -3-(-2)+10-14\\
&= -5
\end{aligned}
$$

Teorema-teorema di atas menunjukkan adanya kesamaan sifat determinan matriks non-bujur sangkar dengan determinan matriks bujur sangkar.