BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persaman linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistem Persamaan (2.1) ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

maka Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dengan $A \in R^{nxn}$.

Menurut Howart Anton (1987) matriks A pada $f(x) = Ax$ dapat ditentukan bentuk inversnya (A^{-1}) dengan menggunakan operasi-operasi baris dan menerapkan operasi-operasi ini secara serempak pada I untuk menghasilkan A^{-1}. Hal ini dapat dirampungkan dengan menggandengkan matriks satuan tersebut ke kanan A dan dengan menerapkan operasi-operasi baris pada kedua ruas hingga ruas kiri tereduksi pada I. Maka matriks akhir akan mempunyai bentuk $[I \mid \; A^{-1}]$.

Contoh 2.1:

Carilah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan aplikasi serempak pada *I* maka dilakukan operasi sebagai berikut :

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ b2 - 2b1 \\ b3 - b1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ b3 + 2b2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ -b3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} b1 - 3b3 \\ b2 + 3b3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} b1 - 2b2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, Jika diambil $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n]^T$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}. \tag{2.3}$$

Kemudian dengan $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dengan $A \in M_{n\times n,}$ maka berlaku sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.4}$$

Untuk memahami Persamaan (2.8) diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\mathbf{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}^T A\mathbf{x}) &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 3x_2 \\ 4x_1 & + & 7x_2 \end{bmatrix} \\
&= (\,2x_1 + 3x_2)y_1 + (4x_1 + 7x_2)y_2 \\
\mathrm{y}^T A\mathrm{x} &= (2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 4x_1y_2 + 7x_2y_2) \\
\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} 2y_1 & + & 4y_2 \\ 3y_1 & + & 7y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= A^T\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

Jika matriks A adalah simetri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1(2x_1 + 4x_2) + x_2(4x_1 + 3x_2) \\
&= 2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 3{x_3}^2 \\
\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} &= \ (2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 3{x_3}^2) \\
\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} 2.2x_1 & + & 2.4x_2 \\ 2.4x_1 & + & 2.3x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2A\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

2.2 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik yang bersifat definit positif maupun definite negatif. Diawali dari bentuk umum kuadratik yaitu:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{2.5}$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan matriks A merupakan matriks simetri ukuran $n\ x\ n$ dengan $C_{ij} \in R$.

Persamaan (2.5) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2.$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_ix_j$$

Selanjutnya, sifat definit dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh Lewis (1995) yaitu jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$.
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $\exists$ $\lambda_j = 0$ untuk suatu $j \in \{1,2,\dots,n\}$.
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$..
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $\exists$ $\lambda_j = 0$ untuk suatu $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Jika nilai eigen tidak memenuhi keempat ketentuan diatas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *Indefinite*.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.1 :

Bentuklah notasi sigma $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -3x_ix_j$ ke kuadratik dan tentukan sifat definit nya.

Penyelesaian:

Bentuk kuadratik $\boldsymbol{x^T A x}$ sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -3x_ix_j = -3x_1x_1 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 - 3x_2x_2$$
$$= -3{x_1}^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 - 3{x_2}^2$$
$$= (-3x_1 - 3x_2)x_1 + (-3x_1 - 3x_2)x_2$$
$$= (-3x_1 \; - 3{x_2}^2 - 3x_1 - 3x_2$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$Det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$Det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$Det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 3 & 3 \\ 3 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6$$

Jadi, dari matriks *A* dapat disimpulkan adalah matriks semi definit negatif.

2.3 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu diskrit. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit, kemudian dilanjutkan dengan masalah kendali lingkar tertutup untuk waktu berhingga.

2.3.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu diskrit untuk persamaan diferensial dinamik.

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{2. 6}$$

Dengan waktu awal $\boldsymbol{x}_0$.

Dengan $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ adalah state internal dan $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan :

$$J_i = \phi(N, \boldsymbol{x}_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x(k), u(k)) \tag{2.7}$$

Selanjutnya, untuk mencari solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit maka diperlukan persamaan-persamaan berikut yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi ojektif.

Persamaan Hamilton : $H(x(k), u(k)) = L(x(k), u(k)) + \lambda^T(k+1) f(x(k), u(k))$(2.8)

Persamaan state : $x(k+1) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k+1})}, k = i, \dots, N-1$ (2.9)

Persamaan kostate : $\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(\mathbf{k+1})}, k = i, \dots, N-1$ (2.10)

Persamaan stasioner : $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})} = 0, k = i, \dots, N-1$ (2.11)

2.3.2 Kendali Lingkar Tertutup Linier Kuadratik

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkaran tertutup didefinisikan persamaan sistem linier untuk waktu diskrit.

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \tag{2.12}$$

Dimana k = 0,1,2,...,*N-1* dan matrik G adalah matriks nonsingular. Dengan meminimalkan fungsi tujuan yaitu:

$$J_i = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)) \tag{2.13}$$

Diasumsikan Q, R dan S adalah matriks simetri semi definit positif.

Tujuannya adalah untuk menemukan urutan kendali $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{N-1}$ untuk meminimalkan J_i. Untuk memecahkan masalah persamaan linier kuadratik, dimulai dengan fungsi Hamilton:

$$H^k = \frac{1}{2}(x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)) + \lambda^T(k+1)(Gx(k) + Hu(k)) \tag{2.14}$$

Kemudian dari Persamaan (2.12) dan (2.13) menghasilkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

Persamaan state: $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{k})} = x(k) = G^T x(k-1) + Hu(k-1)$ (2.15)

Persamaan kostate: $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(\mathbf{k})} = \lambda(k) = Qx(k) + G^T\lambda(k+1)$ (2.16)

Persamaan stasioner: $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})} = 0 = Ru(k) + H^T\lambda(k+1)$ (2.17)

Dari Persamaan (2.16) diperoleh:

$$\lambda(k) = Qx(k) + G^T\lambda(k+1), \;\; k = 1,2,3, \dots, N-1 \tag{2.18}$$

Kemudian Persamaan (2.17) diperoleh

$$u(k) = -R^{-1}H^T\lambda(k+1), \;\; k = 0,1,2, \dots N-1 \tag{2.19}$$

Persamaaan (2.15) dapat ditulis ulang sebagai

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \;\; k = 0,1,2, \dots, N-1 \tag{2.20}$$

Subsitusikan Persamaan (2.19) ke Persamaan (2.20)

$$x(k+1) = Gx(k) - HR^{-1}H^T\lambda(k+1) \quad (2.21)$$

Asumsikan $\lambda(k)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda(k) = P(k)x(k) \quad (2.22)$$

Substitusikan Persamaan (2.22) ke Persamaan (2.18) menghasilkan

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^T P(k+1)x(k+1) \quad (2.23)$$

Lalu, subsitusikan Persamaan (2.22) ke Persamaan (2.21)

$$x(k+1) = Gx(k) - HR^{-1}H^T P(k+1)x(k+1) \quad (2.24)$$

Kemudian Persamaan (2.24) dapat dibentuk:

$$x(k+1) = [I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (2.25)$$

Subsitusikan Persamaan (2.25) ke Persamaan (2.23) menghasilkan

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (2.26)$$

Kemudian dapat dibentuk persamaan Riccati sebagai berikut

$$P(k) = Q + G^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1}G \quad (2.27)$$

Persamaan (2.15) dapat dibentuk

$$u(k) = -R^{-1}H^T\lambda(k+1) = -R^{-1}H^T(G^T)^{-1}[\lambda(k) - Qx(k)]$$
$$= -R^{-1}H^T(G^T)^{-1}[P(k) - Q]x(k) = -K(k)x(k) \quad (2.28)$$

Dimana

$$K(k) = R^{-1}H^T(G^T)^{-1}[P(k) - Q]$$

Contoh 2.4:

1. Diketahui persamaan dinamik waktu diskrit yang diberikan oleh

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k), \quad x(0) = 1$$

dengan fungsi tujuan untuk waktu diskrit sebagai berikut:

$$J_i = \frac{1}{2}(x(10)) + \frac{1}{2}\sum_{k-0}^{9}\left(x^2(k) + u^2(k)\right)$$

dan fungsi tujuan diatas diperoleh $S = 1, Q = 1, R = 1$. Berdasarkan Persamaan (2.27), diperoleh $P(k)$ sebagai berikut:

$$P(k) = 1 + (0.3679)P(k+1)[1 + (0.6321)(1)(0.6321)P(k+1)]^{-1}(0.3679)$$

$$P(k) = 1 + 0.1354\,P(k+1)[1 + 0.3996\,P(k+1)]^{-1}$$

dengan syarat yang akan diberikan

$$P(N) = P(10) = S = 1$$

kemudian dihitung $P(k)$ mundur dari $k = 9$ ke $k = 0$ sebagai berikut:

$$P(9) = 1 + 0.1354 \times 1\,(1 + 0.3996 \times 1)^{-1} = 1.0967$$

$$P(8) = 1 + 0.1354 \times 1.0967\,(1 + 0.3996 \times 1.0967)^{-1} = 1.1032$$

$$P(7) = 1 + 0.1354 \times 1.1032\,(1 + 0.3996 \times 1.1032)^{-1} = 1.1036$$

$$P(6) = 1 + 0.1354 \times 1.1036\,(1 + 0.3996 \times 1.1036)^{-1} = 1.1037$$

$$P(k) = 1.1037, \;\; k = 5,4,3,2,1,0$$

2.4 Penyelesaian Persamaan Riccati Waktu Diskrit

Setelah mengetahui bentuk dari penyelesaian persamaan Riccati, berikut ini diberikan penjelasan mengenai solusi penyelesaian Riccati. Berdasarkan Ogata (1995) diperoleh persamaan riccati waktu diskrit sebagai berikut:

$$P(k) = Q + G^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1} G \tag{2.29}$$

Menurut David J.Clements (2006) persamaan diatas akan mempunyai solusi jika $P(k)$ memenuhi:

1. $\det(H^T P(k) H + R) \neq 0$
2. $D(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.5 Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang titik ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Sementara itu berdasarkan Ogata (1995) definisi kestabilan untuk kasus waktu diskrit dijelaskan sebagain berikut :

Teorema 2.1 (Ogata,1995) Diberikan persamaan sistem waktu diskrit $x(k+1) = Ax(k)$ dengan x_k adalah *vektor state* dan A adalah matrik nonsingular $n\,x\,n$ untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S simetri dan positif definit yang memenuhi:

$$G^T PG - P = -Q$$

Dengan matriks Q adalah matriks simetri, jika Q semi definit positif maka sistem stabil.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.5 :

Tentukan kestabilan dari persamaan dinamik berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas dengan memisalkan matrik Q merupakan matrik identitas, maka sistem diatas dapat diselesaikan dengan langkah sebagai berikut :

$$G^T PG - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.25P_{22} - P_{11} & 0.5(-P_{12} + P_{22}) - P_{12} \\ 0.5(-P + P_{22}) - P_{12} & P_{11} - 2P_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut :

$$0.25P_{22} - P_{11} = -1$$

$$0.5(-P_{12} + P_{22}) - P_{12} = 0$$

$$P_{11} - 2P_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $P_{11} = \frac{11}{5}$, $P_{12} = \frac{8}{5}$, $P_{22} = \frac{24}{5}$ dan dapat dibentuk menjadi :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks P adalah matrik definit positif sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - P) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & \lambda - \frac{24}{5} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{11}{5}\right)\left(\lambda - \frac{24}{5}\right) - \frac{64}{25} = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya $\lambda_1 = 5.56$ dan $\lambda_2 = 1.43$

dari matriks diatas didapat: $\lambda_1 = 5.56$, dan$\lambda_2 = 1.43$, karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks diatas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.