Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Curah Hujan Ekstrem

Curah hujan ekstrem adalah kondisi curah hujan yang cukup tinggi atau rendah dari rata-rata kondisi normalnya. Secara garis besar, curah hujan ekstrem dapat dibedakan menjadi curah hujan ekstrem basah yang mengakibatkan banjir dan curah hujan ekstrem kering yang berdampak kekeringan.

Penentuan nilai-nilai ekstrem menurur Gill dan Kelleze (2003) dapat dilakukan dengan dua cara yaitu:

1. Dengan mengambil nilai-nilai maksimum dalam suatu periode, misalnya mingguan atau bulanan, pengamatan atas dari nilai-nilai ini dianggap sebagai nilai-nilai ekstrem.
2. Dengan mengambil nilai-nilai yang melampau ambang μ dianggap sebagai nilai-nilai ekstrem.

Dalam penelitian ini, data hujan maksimum pertahun diambil dari data hujan harian. Untuk mendapatkan hujan maksimum pertahun atau data hujan ekstrem tersebut yaitu dengan melihat data yang paling maksimum pada data hujan harian pertahun.

2.2 Variabel Acak Kontinu

Sebaran peluang variabel acak kontinu tidak dapat diberikan dalam bentuk tabel karena variabel acak kontinu berpeluang nol untuk mengambil tepat salah satu nilainya. Meskipun sebaran peluang dari variabel acak kontinu tidak bisa diberikan dalam bentuk tabel, tetapi sebaran ini dapat dinyatakan dalam bentuk rumus. Rumus itu merupakan fungsi nilai-nilai variabel acak kontinu X, sehingga dapat digambarkan sebagai suatu kurva kontinu.

Defenisi 2.1 (Wapole dan Myers, 1989) X dikatakan variabel acak kontinu, jika ruang sampel dari variabel acak tidak terbatas atau terbatas tapi tidak memiliki nilai yang pasti.

2.3 Fungsi Densitas

Fungsi peluang yang digambarkan oleh kurva kontinu dari variabel acak kontinu biasanya disebut fungsi densitas atau fungsi kepadatan peluang.

Defenisi 2.2 (Wapole dan Myres, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari variabel acak kontinu X, yang biasanya disebut fungsi densitas, yang didefenisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ (2.1)

2.4 Fungsi Distribusi

Jika $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak kontinu, maka fungsi densitas peluang $f(x)$ dari X adalah turunan dari $F(x)$.

Definisi 2.3 (Wapole dan Myres, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel dari X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang real. Jika X adalah kontinu, sedemikian sehingga:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \tag{2.2}$$

2.5 Distribusi Peluang

Distribusi peluang merupakan bagian penting dalam menganalisa peluang dari suatu eksperimen. Seluruh kemungkinan yang terjadi dari titik percobaan dan nilai peluangnya memiliki hubungan yang erat. Secara keseluruhan himpunan pasangan terurut dari titik percobaan dan nilai peluang padanannya inilah yang disebut ditribusi peluang.

Defenisi 2.4 (Wapole dan Myres, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefenisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ (2.3)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

2.6 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_x atau μ. Rataan ini disebut juga oleh para statiskawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$ (Wapole dan Mayer, 1989).

Defenisi 2.5 (Wapole dan Mayer, 1989) Diberikan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan X adalah sebagai berikut:

$$\mu = E(X) = \sum_{X \in R_x} x f(x), \text{ bila } X \text{ diskrit} \tag{2.4}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d(x), \text{ bila } X \text{ kontinu} \tag{2.5}$$

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang padanannya $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acaknya kontinu, defenisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (Wapole dan Mayer, 1989).

2.7 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(x) = (x - \mu)^2$, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau σ_x^2 atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz dan Misra, 1988).

Defenisi 2.6 (Dudewicz dan Misra, 1988) diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$Var(x) = E(X - \mu)^2 = \sum_X (X - \mu)^2 f(X) \quad \text{, bila } X \text{ diskrit}$$

$$Var(x) = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) d(x) \quad \text{, bila } X \text{ kontinu} \quad (2.6)$$

Teorema 2.1 (Dudewicz dan Misra, 1988) variansi dari peubah acak X adalah

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.7)$$

Bukti:

$$Var(X) = E[(X - \mu)]^2 = E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)]$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

2.8 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah salah satu keluarga distribusi probabilitas kontinu yang berasal dari fungsi Gamma. Distribusi Gamma hanya digunakan jika jumlah kejadian yang berhasil berupa integer. Distribusi Gamma mempunyai fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}; X \geq 0 \quad (2.8)$$

dengan,

β : Parameter bentuk

α : Parameter skala

$\Gamma(\alpha)$: Fungsi Gamma

2.9 Distribusi Pareto

Distribusi Pareto pertama kali diteliti oleh seorang ahli fisika Italia yang bernama Vilfredo Pareto. Distribusi ini pertama kali digunakan untuk pemodelan pendapatan dan populasi penduduk kota. Distribusi Pareto lebih sering digunakan untuk pemodelan data ekstrem seperti hidrologi, klimatologi, dan udara. Dua parameter yaitu α dan k merupakan ciri dari distribusi Pareto (Joseph Lee Petersen).

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Distribusi Pareto merupakan distribusi acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x;\alpha,k) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,;\ k \le x \le \infty;\ \alpha,k > 0 \tag{2.9}$$

Fungsi distribusi kumulatif distribusi pareto adalah sebagai berikut:

$$F(X;\alpha,k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}\,;\ k \le x \le \infty;\ \alpha,k > 0 \tag{2.10}$$

2.10 Distribusi Gamma-Pareto

Distribusi Gamma-Pareto merupakan kombinasi dari fungsi distribusi Gamma dan distribusi Pareto yang mengambil bentuk Pareto yang tersusun dalam Gamma. Dengan tiga parameter, Gamma-Pareto memiliki fleksibilitas lebih besar dari pada Gamma dan Pareto dalam menampung distribusi data real. Rumus distribusi Gamma-Pareto dikemukakan sebagai berikut :

$$g(x) = \frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1}, \qquad \alpha,c,\theta > 0; x > \theta \tag{2.11}$$

dengan,

$g(x)$: Fungsi densitas peluang dari distribusi Gamma-Pareto

α : Parameter skala

c : Parameter bentuk

θ : Parameter lokasi

Berikut ini akan ditunjukan apakah fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma-Pareto memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang, yaitu sebagai berikut:

1. $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in (\theta,\infty)$
2. $\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = 1$

Bukti:

1. Akan dibuktikan $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in (\theta,\infty)$.

   Diberikan persamaan (2.8) sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$g(x) = \frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1}, \qquad \alpha, c, \theta > 0; x > \theta$$

Untuk x lainnya, $g(x) = 0$.

Karena $x > \theta$ dan $\alpha, c, \theta > 0$, maka jelas bahwa $\frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}} > 0$ dan $\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}} > 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} > 0$.

Karena $x > \theta$ dan $\theta > 0$, maka $ln\,(x/\theta) > 0$.

Untuk $\alpha = 1$, maka $\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} = 1 > 0$.

Untuk $\alpha > 1$, maka $\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} > 0$.

Untuk $\alpha < 1$, maka $\alpha - 1 < 0$. Akibatnya $\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} > 0$.

Karena $\frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}} > 0$, $\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}} > 0$, dan $\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} > 0$, maka

$$g(x) = \frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1}, \qquad \alpha, c, \theta > 0; x > \theta$$

Jadi, terbukti bahwa $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in (\theta, \infty)$.

2 Akan dibuktikan $\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = 1$

Bukti:

$$\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x\Gamma(\alpha)c^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{cx}\frac{1}{c^{\alpha-1}}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{cx}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dx$$

Dengan teknik subtitusi pada integrasi, misalkan

$u = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{x}{\theta}\right) \qquad \leftrightarrow -u = -\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)$

$\leftrightarrow -u = \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\frac{1}{c}}$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$$\leftrightarrow \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{1}{c}} = e^{-u}$$

$du = \frac{1}{cx}dx$

dimana batas-batas integrasi menjadi,

Untuk $x = \theta$, maka $u = 0$

Untuk $x = \infty$, maka $u = \infty$

Sehingga,

$$\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\Gamma(\alpha))$$

$$= 1$$

Jadi, terbukti bahwa $\int_{\theta}^{\infty} g(x)dx = 1$

Karena kedua sifat fungsi kepadatan probabilitas di atas terpenuhi, maka Persamaan (2.10) merupakan suatu fungsi kepadatan dari variabel acak kontinu X.

Dari Persamaan (2.10) akan dicari fungsi kumulatif dari distribusi Gamma-Pareto.

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)dy$$

$$= \int_{\theta}^{x} \frac{1}{y\Gamma(\alpha)c^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{x} \frac{1}{yc^{\alpha}}\left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\theta}^{x} \frac{1}{cy}\frac{1}{c^{\alpha-1}}\left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}}\left\{\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dy$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta}^{x} \frac{1}{cy} \left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}} \left\{\frac{1}{c} \ln\left(\frac{y}{\theta}\right)\right\}^{\alpha-1} dy$$

Dengan teknik subtitusi pada integrasi,

Misalkan,

$$u = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{y}{\theta}\right) \qquad \leftrightarrow \; -u = -\frac{1}{c} \ln\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

$$\leftrightarrow \; -u = \ln\left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}}$$

$$\leftrightarrow \; \left(\frac{\theta}{y}\right)^{\frac{1}{c}} = e^{-u}$$

$$du = \frac{1}{cy} dy$$

dimana batas-batas integrasi menjadi,

Untuk $y = \theta$, maka $u = 0$

Untuk $x = x$, maka $u = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)$

Sehingga:

$$G(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta}^{\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma\left\{\alpha, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\}$$

dimana $\gamma\left\{\alpha, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\} = \int_{0}^{\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x}{\theta}\right)} u^{\alpha-1} e^{-u} du$.

Jadi, fungsi kumulatif distribusi Gamma-Pareto adalah

$$G(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma\left\{\alpha, \frac{1}{c} \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)\right\} \tag{2.12}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak Cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

2.11 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum likelihood sering digunakan dalam penelitian karena prosedur dan langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthly, 2006).

2.11.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang disebut fungsi likelihood yang dinotasikan dengan $L(\theta; X)$ maka:

$$L(\theta; X) = f(X; \theta) \tag{2.13}$$

karena $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ adalah fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak yang bebas, sehingga:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \tag{2.14}$$

Selanjutnya Persamaan (2.10) disubtitusikan ke Persamaan (2.13), maka (lee dan Wang, 2003) :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1} n = f(x_i; \theta) \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.11.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi maksimum *likelihood* (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\hat{\theta}$ sebagai estimator titik untuk θ yang memaksimumkan $L(\theta; X)$. Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(X; \theta)$, kemudian dibentuk fungsi kepadatan peluangnya bersama $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta; X)$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak Cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood*$L(\theta; X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan ln $L(\theta; X) = L(\theta; X)$, dimana $L(\hat{\theta}; X) \geq L(\theta; X)$. dengan menggunakan logaritma $L(\theta; X)$, maka estimator likelihood diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dL(\theta;X)}{d\theta} = 0$ (Lee dan Wang, 2003).

2.11.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Metode Newton-Raphson adalah proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang dilakukan secara berulang-ulang, dimana setiap pengulangan disebut iterasi. Pada umumnya para ahli statistik sering menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameter dari suatu persamaan (Yendra, 2010).

Metode Newton-Raphson untuk mencari pemecahan dari $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sehingga:

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_p) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \cdots, x_p) = 0$$

kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk ke dalam sebuah matriks yang disebut dengan matriks Jacobian, yaitu sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Kemudian dicari invers dari Persamaan (2.13), yaitu sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak Cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Selanjutnya misalkan ${x_1}^k, {x_2}^k, \cdots, {x_p}^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke k, dan misalkan ${f_1}^k, {f_2}^k, \cdots, {f_p}^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_p$, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} {f_1}^k &= f_1\left({x_1}^k, {x_2}^k, \cdots, {x_p}^k\right) \\ {f_2}^k &= f_2\left({x_1}^k, {x_2}^k, \cdots, {x_p}^k\right) \\ &\vdots \\ {f_p}^k &= f_p\left({x_1}^k, {x_2}^k, \cdots, {x_p}^k\right) \end{aligned}$$

dan misalkan ${b_{ij}}^k$ adalah elemen J^{-1} yang dihasilkan pada ${x_1}^k, {x_2}^k, \cdots, {x_p}^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} {x_1}^{k+1} &= {x_1}^k - \left({b_{11}}^k {f_1}^k + {b_{12}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{1p}}^k {f_p}^k\right) \\ {x_2}^{k+1} &= {x_2}^k - \left({b_{21}}^k {f_1}^k + {b_{22}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{2p}}^k {f_p}^k\right) \\ &\vdots \\ {x_p}^{k+1} &= {x_p}^k - \left({b_{p1}}^k {f_1}^k + {b_{p2}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{pp}}^k {f_p}^k\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Proses iterasi dapat dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Nilai awal dapat dicari salah satunya dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linear sederhana. Selanjutnya, proses iterasi dapat dihentikan jika iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (Yendra, 2010).

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU