BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Kematian Neonatal

Neonatal adalah bayi yang baru mengalami proses kehidupan intrauterine ke kehidupan ekstrauterine. Kematian neonatal merupakan kematian pada periode saat bayi lahir hidup hingga bayi berumur 28 hari (WHO, 2006). Menurut Abdullah, Naeim dan Mahmud, dalam Kesmas Nasional (2012), kematian bayi di seluruh dunia diperkirakan 11 juta setiap tahun, 60% kematian bayi terjadi pada masa neonatal dan 40% kematian neonatal terjadi pada umur satu minggu pertama kehidupan.

Kematian neonatal tersebut dibagi dalam dua fase, yakni kematian *eraly neonatal* dan kematian *late neonatal*. Dalam satu dekade terakhir, penurunan kematian neonatal mengalami penurunan hanya sebesar 7%. Bahkan, persatuan Bangsa-Bangsa (PBB) memperkirakan bahwa dua pertiga dari kematian bayi saat ini merupakan kematian neonatal. Dengan kata lain, sejumlah empat juta bayi neonatal mengalami kematian di seluruh dunia (30 per 1000 bayi lahir hidup). Kematian neonatal banyak terjadi pada bayi dengan berat badan lahir rendah (BBLR). Di Indonesia, berdasarkan Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI) 2002, 72,4% bayi dengan berat kurang dari 2.500 gram mengalami kematian saat neonatal (Suraya, 2017).

Penyebab utama kematian neonatal adalah asfiksia, tetanus neonatorum dan trauma kelahiran yang sebetulnya sebagian besar dari kematian tersebut dapat dicegah melalui pemeliharaan kesehatan ibu selama masa kehamilan penolong persalinan yang aman dan bersih, serta penanganan yang benar terhadap bayi baru lahir terutama yang beresiko tinggi. Kematian neonatal juga disebabkan karena berbagai hal yang saling berkaitan antara sebab medis dan faktor sosial (Prabamurti, 2008).

2.2 Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan peubah acak Y, yaitu banyaknya hasil selama selang waktu tertentu atau dalam daerah tertentu disebut percobaan Poisson. Banyaknya nilai Y dalam suatu percobaan Poisson disebut suatu peubah acak Poisson dan distribusi peluangnya disebut distribusi Poisson. Selang waktu tersebut dapat berupa berapa saja panjangnya, misalnya semenit, sehari, seminngu sebulan, bahkan setahun. Distribusi Poisson merupakan suatu bentuk distribusi untuk peristiwa yang probabilitas kejadiannya sangat kecil dan bergantung pada interval waktu tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel diskrit (Kurniawati, 2014). Menurut Rashwan dan Kamel (2011), distribusi peluang peubah acak Poisson Y adalah :

$$f(y) = Pr(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} \quad , \qquad y = 0,1,2,\ldots \qquad (2.1)$$

dimana

λ : rata-rata banyak sukses yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu

y : jumlah pengamatan yang dilakukan ke-i

e : $2{,}7183$

Untuk mengetahui apakah data yang diamati berdistribusi Poisson atau tidak, dapat dilakukan dengan menggunakan uji *Kolmogorov Smirnov* (Syam, 2017), dimana hipotesis pengujiannya sebagai berikut:

H_0 : $F(X) = F_0(X)$ (Sampel berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson)

H_1 : $F(X) \neq F_0(X)$(Sampel tidak berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson)

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Statistik uji

$D = Max|F_0(X) - F(X)|$

Kriteria pengujian

Tolak H_0 jika nilai $D_{hit} > D_{\alpha}$, dimana D_{α} merupakan nilai kritis yang diperoleh dari tabel *Kolmogorov Smirnov* atau Tolak H_0 jika nilai sig hasil output SPSS memiliki nilai kurang dari $\alpha = 0{,}05$ yang artinya sampel tidak berdistribusi poisson.

2.3 Regresi Poisson

Regresi Poisson merupakan model regresi yang dapat digunakan pada data yang variabel responnya berdistribusi Poisson dan berjenis diskrit. Model regresi poisson merupakan model standar untuk data diskrit dan termasuk dalam model linier. Regresi poisson merupakan suatu bentuk analisis menggunakan regresi untuk menduga model data seperti jumlah, perubahan nilai atau mengelompokan data ke tabel (Cahyandari, 2014).

Regresi Poisson merupakan penerapan dari *Generelized Linier Model (GLM)*. *Generelized Linier Model (GLM)* merupakan perluasan dari model regresi umum untuk variabel respon yang memiliki sebaran eksponensial. Regresi Poisson digunakan untuk menganalisis data berjenis diskrit. Dalam regresi Poisson terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu variabel respon (Y) diskrit dan asumsi equidispersi. Equidispersi yaitu nilai rata-rata sama dengan nilai varian atau $(Y|x) = E(Y|x) = \lambda$.

Teorema

Misalkan Y variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter λ maka rata-rata dan variansi Y adalah λ.

Bukti

Rata-rata dari Y berdistribusi Poisson dengan parameter λ adalah

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y.f(y)$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y.\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y-1)!}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda\lambda^{(y-1)}e^{-\lambda}}{(y-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(y-1)}e^{-\lambda}}{(y-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!} \qquad \text{(misalkan } z = y - 1, y = 1 \text{ maka } z = 0\text{)}$$

$$= \lambda \sum_{z=0}^{\infty} f(z)$$

$$= \lambda$$

Sedangkan variansi dari Y yang berdistribusi Poisson dengan parameter λ adalah

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y^2)]^2$$

$$= E(Y^2 - Y + Y) - [E(Y^2)]^2$$

$$= E(Y(Y - 1)) + E(Y) - [E(Y^2)]^2 \qquad \text{(Dari sifat ekspektasi)}$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y(y - 1). \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} + E(Y) - [E(Y^2)]^2$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{(y - 2)!} + E(Y) - [E(Y^2)]^2$$

$$= \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{(Y-2)} e^{-\lambda}}{(y - 2)!} + E(Y) - [E(Y^2)]^2$$

$$= \lambda^2 \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!} + E(Y) - [E(Y^2)]^2$$

Misalkan $z = y - 2, y = 2$ maka $z = 0$

$$Var(Y) = \lambda^2 . 1 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

2.3.1 Analisis Regresi Poisson Sederhana

Menurut Hertriyanti (2006:15), analisis regresi Poisson sederhana adalah sebuah metode statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara sebuah variabel respon (Y) yang menyatakan data diskrit dan sebuah variabel prediktor (X). Variabel respon (Y) diberikan $X = x$ diasumsikan berdistribusi Poisson, sedangkan variabel prediktor (X) dapat berjenis diskrit, kontinu atau berjenis kategorik.

Misalkan ingin diketahui hubungan antara sebuah variabel respon (Y) yang menyatakan data diskrit dan sebuah variabel prediktor (X) yang berjenis kontinu atau kategorik. Variabel random respon (Y) diberikan $X = x$ diasumsikan berdistribusi Poisson. Jika diberikan sebuah sampel berisi n buah pasangan pengamatan yang saling bebas, yaitu $\{(X_i, Y_i)\ ; i = 1,2,3, \dots, n\}$ dengan $X_i$dan Y_i berturut-turut adalah pengamatan ke-i dari variabel X dan Y, maka hubungan antara Y dan X tidak dapat dijelaskan oleh model regresi linear sederhana.

$$P(Y|\mu) = \frac{\mu^{y_i} e^{-\mu}}{y!}, y = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(Y) = \mu$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 X_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

Maka model regresi poisson sederhana yaitu:

$$\ln\big(\mu_i(x_i)\big) = \beta_0 + \beta_1 X_i ; i = 1, 2, \dots, n \qquad (2.2)$$

Atau equivalen dengan

$$\mu_i(x_i) = e^{\beta_0 + \beta_1 X_i} ; i = 1, 2, \dots, n \qquad (2.3)$$

Dengan β_0, β_1 adalah parameter yang tidak diketahui. Model (2.2) sering disebut dengan fungsi penghubung logaritma atau fungsi log *link*.

2.3.2 Analisis Regresi Poisson Berganda

Menurut Hertriyanti (2006:35), regresi Poisson berganda adalah regresi yang menganalisis hubungan antara sebuah variabel respon (Y) yang merupakan data berjenis diskrit, diasumsikan berdistribusi Poisson dan p buah variabel prediktor (X) yang berjenis diskrit, kontinu atau kategorik.

Model regresi Poisson berganda merupakan perluasan dari model regresi Poisson sederhana, dimana dalam regresi Poisson berganda akan diketahui hubungan antara sebuah variabel respon (Y) yang berjenis diskrit dan p buah variabel prediktor $X_1, X_2, \dots, X_p$ yang berjenis kontinu atau kategorik. Variabel random dari respon Y diberikan $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p$ yang diasumsikan berdistribusi Poisson.

Diberikan sebuah sampel yang berisi n buah pasangan pengamatan yang saling bebas $\{(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}, Y_i) ; i = 1, 2, \dots, n\}$ dengan $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}$ berurut-turut adalah pengamatan ke-i dari variabel$X_1, X_2, \dots, X_p$ dan Y_i adalah pengamatan ke-i dari variabel Y. Jika rata-rata bersyarat dari Y_i diberikan nilai $X_{1i},\ X_{2i},\dots,X_{pi}$ dinyatakan oleh

$$E(Y_i|X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i},\dots,X_{pi} = x_{pi}) = \mu_i(x_{1i},\ x_{2i},\dots,x_{pi}),\quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\mu_i(x_{1i},\ x_{2i},\dots,x_{pi}) = e^{\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\cdots+\beta_p X_{pi}};\qquad i = 1,2,\dots,n$$

Maka model regresi poisson bergandanya adalah

$$\ln(\mu_i(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_p X_{pi} \tag{2.4}$$

Dengan $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p$ menyatakan parameter-parameter yang tidak diketahui.

Model (2.3) ekuivalen dengan $\mu_i(x_{1i},\ x_{2i},\dots,x_{pi}) = e^{\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\cdots+\beta_p X_{pi}}$

Dengan $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p$ menyatakan parameter-parameter yang tidak diketahui.

Model (2.4) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}\mu_i(x_{1i},\ x_{2i},\dots,x_{pi}) &= e^{\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\cdots+\beta_p X_{pi}}\\ &= e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3.3 Penaksiran Parameter pada Model Regresi Poisson

Pada model regresi Poisson harus dilakukan penaksiran parameter yang tidak diketahui (β_j), $j = 1,2,3\dots,p$. Metode penaksir parameter suatu model yang digunakan pada regresi Poisson adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) (Cahyandari, 2014).

Jika diberikan sebuah sampel berisi n buah pasangan pengamatan yang saling bebas, yaitu $\{(X_{1i},\ X_{2i},\dots,X_{pi},Y_i); i = 1,2,\dots,n\}$ dengan X_i dan Y_i berturut-turut adalah pengamatan ke-i dari variabel X dan Y dan asumsi untuk setiap $X_{1i} = x_{1i},\ X_{2i} = x_{2i},\dots,X_{pi} = x_{pi}$ distribusi dari Y_i adalah Poisson dan $E(Y_i|X_i = x_i) = \mu_i(x_i)$, maka fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i oleh $x_{1i},\ x_{2i},\dots,x_{pi}$ adalah

$$f\left(y_i\middle|x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi};\ \mu_i(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi})\right) = \frac{[\mu_i(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi})]^{y_i} e^{[-\mu_i(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi})]}}{y_i!},$$

$$y_i = 0,1,2,\dots$$

Karena $\mu_i(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi}) = [e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]$ maka diperoleh

$$f(y_i|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi};\ \boldsymbol{\beta}) = \frac{[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]^{y_i} e^{-[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]}}{y_i!} \quad (2.6)$$

Penaksiran parameter (β_j) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

1. Mengambil n buah sampel acak
2. Membentuk fungsi *Likelihood* berdasarkan persamaan (2.6)

   Fungsi *Likelihood* untuk model regresi Poisson dapat diperoleh dengan mengalikan semua fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i oleh x_i sehingga

$$K(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi};\ \boldsymbol{\beta})$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]^{y_i} e^{-[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]}}{y_i!}\right\} \quad (2.7)$$

3. Mengambil bentuk log dari fungsi *Likelihood* yang diperoleh

   Persamaan (2.7) dibentuk menjadi fungsi *log likelihood* mudah diselesaikan maka diubah. Fungsi *log likelihood*nya yaitu $k(\boldsymbol{\beta}) = \log K(\boldsymbol{\beta})$ sehingga diperoleh

$$k(\boldsymbol{\beta}) = \log K(\boldsymbol{\beta})$$

$$= \log\left\{\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]^{y_i} e^{-[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]}}{y_i!}\right\}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]^{y_i} e^{-[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]}}{y_i!}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\log[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]^{y_i} + \log e^{-[e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})}]} - \log y_i!\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{y_i(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji}) - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})} - \log y_i!\right\}$$

Dalam persamaan tersebut x_i dan y_i bilangan yang berasal dari pengamatan sedangkan $(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})$ dianggap berubah bila garis regresinya berubah (Sembiring, 1995: 40). Dari segi kalkulus, ini berarti bahwa perlu dicari turunan dari fungsi *log likelihood* terhadap $k(\boldsymbol{\beta})$ kemudian menyamakannya dengan nol sehingga diperoleh nilai $p + 1$ persamaan *likelihood*.

4. Mendiferensialkan fungsi *log likelihood* $k(\boldsymbol{\beta})$ terhadap masing-masing parameter β yaitu

$$R_0(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})} \right\} = 0$$

$$R_1(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i x_{1i} - x_{1i} e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right\} = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{1i} \left(y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right) \right\} = 0$$

$$\ldots \tag{2.8}$$

$$R_p(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i x_{pi} - x_{pi} e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right\} = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{pi} \left(y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right) \right\} = 0$$

Bentuk vektor dari persamaan (2.8) yaitu

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} R_0(\boldsymbol{\beta}) \\ R_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ R_p(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial k(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})} \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{1i} \left(y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right) \right\} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_{pi} \left(y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ji})} \right) \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Selajutnya nilai parameter $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$ akan memaksimumkan $k(\boldsymbol{\beta})$. Nilai taksiran maksimum likelihood dinotasikan dengan $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$.

Turunan kedua atau matriks hessian dari $k(\boldsymbol{\beta})$ terhadap β_0 yaitu

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial {\beta_0}^2} = \frac{\partial \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})} \right\} \right\}}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1\partial\beta_0} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right\}\right\}}{\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_p\partial\beta_0} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_p} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_p\partial\beta_1} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_p} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}x_{pi}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_0\partial\beta_p} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1\partial\beta_p} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}x_{1i}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial{\beta_p}^2} = \frac{\partial\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}(y_i - e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji})})\right\}\right\}}{\partial\beta_p} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}x_{pi}\right\}$$

Jika dibuat bentuk matriks menjadi

$$H(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} H_{00}(\boldsymbol{\beta}) & H_{01}(\boldsymbol{\beta}) & \dots & H_{0p}(\boldsymbol{\beta}) \\ H_{10}(\boldsymbol{\beta}) & H_{11}(\boldsymbol{\beta}) & \dots & H_{1p}(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{p0}(\boldsymbol{\beta}) & H_{p1}(\boldsymbol{\beta}) & \dots & H_{pp}(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_0^2} & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \dots & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_p\partial\beta_0} \\ \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_p\partial\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_0\partial\beta_p} & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_1\partial\beta_p} & \dots & \frac{\partial^2 k(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_p^2} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} \\
-\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{1i}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{pi}\right\} \\
-\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{1i}\right\} & -\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{pi}\right\}
\end{bmatrix}
$$

$$
= -\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n}\left\{e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} \\
\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{1i}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{1i}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{pi}\right\} \\
\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{1i}\right\} & \sum_{i=1}^{n}\left\{x_{pi}e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j x_{ji}\right)}x_{pi}\right\}
\end{bmatrix}
\tag{2.9}
$$

Persamaan (2.9) merupakan persamaan dalam bentuk eksponensial sehingga bukan merupakan persamaan linear dalam $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ maka digunakan metode numerik Newton Raphson dalam mencari taksirannya.

Metode Newton-Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekati dengan memperhatikan gradien pada titik tersebut. Titik pendekatan ke $n+1$ dituliskan dengan:

$$
\beta^{n+1} = \beta^{(n)} - \frac{l'\left(\beta^{(n)}\right)}{l''\left(\beta^{(n)}\right)}
$$

dengan:

$\beta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$

$n = 0,1,2,\dots,k$

$\theta^{(0)}$ = nilai awal yang di pilih

Dalam hal perhitungan iterasi digunakan *software* untuk memperoleh nilai taksiran β. Sehingga taksiran dari model regresi Poisson berganda yaitu

$$
\ln\left(\hat{\mu}_i(x_i)\right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_p X_{pi}
$$

$$
\hat{\mu}_i(x_i) = e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_{1i}+\hat{\beta}_2 X_{2i}+\cdots+\hat{\beta}_p X_{pi}} \tag{2.10}
$$

2.3.4 Pengujian Parameter Model Regresi Poisson

Sebelum menentukan nilai statistik uji, terlebih dahulu dilakukan pengujian parameter pada model regresi Poisson untuk mengetahui ada atau tidak ada pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon. Pengujian parameter pada model regresi Poisson dilakukan menggunakan uji serentak dan uji parsial.

2.3.4.1 Uji Serentak Parameter Model Regresi Poisson

Pengujian serentak parameter model regresi Poisson digunakan untuk mengetahui ada tidaknya pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon (Darnah, 2011).

Hipotesis

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$; untuk suatu $j = 1, 2, \ldots, p$

Taraf Signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Statistik uji yang digunakan

$$G = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{W})}{L(\widehat{\Omega})}\right) = 2\left[\ln L(\widehat{\Omega}) - \ln L(\widehat{W}\right]$$

dengan

$L(\widehat{W})$ adalah nilai *likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor.

$L(\widehat{\Omega})$ adalah nilai *likelihood* untuk model lengkap dengan melibatkan variabel prediktor.

Kriteria pengujian

Tolak H_0 apabila $G \geq \chi^2_{v,\alpha}$ dengan v adalah banyaknya parameter model, artinya ada setidaknya satu variabel prediktor yang mempengeruhi variabel respon.

2.3.4.2 Uji Parsial Parameter Model Regresi Poisson

Pengujian secara parsial digunakan untuk mengetahui apakah variabel prediktor berpengaruh terhadap variabel respon secara individual yang dihasilkan. Statistik uji yang digunakan untuk uji parsial yaitu uji *Wald* (Darnah, 2011).

Hipotesis

H_0 : $\beta_j = 0$; untuk suatu $j = 1, 2, \dots, p$

H_1 : $\beta_j \neq 0$; untuk suatu $j = 1, 2, \dots, p$

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Statistik uji Wald

$$W_j = \left(\frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}\right)^2$$

dengan

$\hat{\beta}_j$ adalah taksiran parameter β_j,

$SE(\hat{\beta}_j)$ adalah taksiran standar eror dari β_j

Kriteria pengujian

H_0 ditolak jika $W_j > \chi^2{}_{\alpha,v}$ atau tolak H_0 jika nilai signifikansi kurang dari α dimana α adalah tingkat signifikansi dan v adalah derajat bebas, artinya variabel prediktor (independen) berpengaruh terhadap variabel respon.

2.3.5 Parameter Dispersi

Menurut Darnah (2011), hubungan parameter dispersi (ϕ) dengan variansi dan mean dalam regresi Poisson dapat digunakan sebagai cara alternatif untuk mengetahui ada tidaknya masalah *overdispersi*.

Parameter dispersi (ϕ) diperoleh dari rumus :

$$\phi = \frac{nilai\ deviance}{df}$$

dengan

df : banyaknya parameter termasuk konstanta

n : banyaknya pengamatan

μ_i : penduga bagi respon rata-rata ke-i

Jika nilai $\phi > 0$ maka terjadi *overdispersi* dan jika $\phi < 0$ maka terjadi *underdispersi*.

Menurut Rashwan dan Kamel (2011) nilai $deviance$ didefinisikan sebagai

$$deviance:\ G^2 = 2\sum_{i=1}^{n} y_i \ln\frac{y_i}{\mu_i}$$

2.3.6 *Overdispersi* dan *Underdispersi*

Pada regresi Poisson terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi, salah satu asumsinya adalah adanya *equidispersi* atau nilai variansi sama dengan nilai rata-ratanya. Namun, sering terjadi pelanggaran asumsi pada regresi Poisson. Tidak jarang nilai variansinya melebihi nilai rata-rata atau kurang dari rata-rata. Kondisi ini sering disebut dengan *Overdispersi* atau *Underdispersi.*

Overdispersi adalah kondisi dimana data variabel respon menunjukkan nilai variansi lebih besar dari nilai rata-ratanya, sedangkan *underdispersi* adalah nilai variansi kurang dari nilai rata-ratanya. *Overdispersi* akan menghasilkan nilai $deviance$ yang menjadi sangat besar sehingga model yang dihasilkan kurang tepat. Oleh karena itu dibutuhkan sebuah model yang dapat mengatasi gejala *overdispersi* dan *underdispersi*, salah satu model regresi yang digunakan, yaitu *Generalized Poisson Regression*.

2.3.7 Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah adanya hubungan antara variabel bebas yang satu dengan variabel bebas yang lain (Aulele, 25). Konsekuensi jika dalam sebuah model mengandung multikolinieritas adalah variannya akan terus naik dan membesar. Jika varian semakin naik atau membesar maka *standar error* β_1 dan β_2 juga naik atau membesar.

Pendektesian kasus multikolinieritas dilakukan menggunakan kriteria nilai VIF. Jika nilai Variance Inflation Factor (VIF) lebih besar dari 10 menunjukkan adanya multikolinieritas antar variabel prediktor (Rusianti, 2016). Untuk mendeteksi ada tidaknya multikolinieritas dengan melihat nilai *Tolerance*. Jika nilai *Tolerance* lebih dari 0,1 maka tidak terjadi multikolinieritas.

Hipotesis

H_0 : terdapat multikolinieritas dengan model regresi

H_1 : tidak terdapat multikolinieritas dengan model regresi

Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

Statistik uji

$$VIF = \frac{1}{(1 - r_{i,j}{}^2)}$$

$$Tolerance = \frac{1}{VIF_J}$$

dengan

$r_{i,j}$ adalah koefisien korelasi antara X_i dengan X_j

Kriteria pengujian

Tolak H_0 jika seluruh variabel prediktor memiliki nilai VIF kurang dari 10 dan nilai *Tolerance* lebih dari 0,1, yang berarti bahwa tidak terjadi multikolinieritas.

Solusi untuk mengatasi adanya kasus multikolinieritas, salah satunya adalah dengan mengeluarkan variabel prediktor yang memiliki nilai VIF tertinggi atau yang mengandung multikolinieritas dan meregresikan kembali variabel-variabel prediktor yang signifikan (Nasra, 2017).

2.4 Model *Generalized Poisson Regression*

Penanganan pelanggaran asumsi *equidispersi* pada model regresi Poisson dapat dikembangkan dengan menggunakan model *Generalized Poisson Regression* (GPR). Model *Generalized Poisson Regression* (GPR) dapat digunakan untuk data diskrit yang mempunyai distribusi Poisson tanpa adanya asumsi *equidispersi* (Melliana, 2013).

Menurut Sadia (2013), dalam *Generalized Poisson Regression* (GPR) fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i diberikan nilai $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi}$ adalah:

$$f_i\left(y_i | x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi} : \mu_i, \alpha\right) = \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right)$$

$$y_i = 0, 1, 2, \ldots, \infty \qquad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.11) jelas terlihat bahwa fungsi probabilitas *Generalized Poisson Regression* merupakan perluasan dari fungsi probabilitas poisson dimana pada fungsi probabilitas *Generalized Poisson Regression* terdapat sebuah parameter tambahan yaitu α yang merupakan parameter dispersi.

Rata-rata dan variansi bersyarat dari Y_i diberikan untuk $X_{1i} = x_{1i}$, $X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{pi} = x_{pi}$ regresi Poisson tergeneralisir menurut Famoye (2004) adalah

$E(Y_i | X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{pi} = x_{pi}) = \mu_i$

$Var(Y_i | X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \ldots, X_{pi} = x_{pi}) = \mu_i(1 + \alpha\mu_i)^2$

1. Diketahui Y_i memiliki fungsi distribusi probabilitas seperti yang tertera pada Persamaan (2.11), sehingga diperoleh:

$$E(Y_i) = \sum_{y_i=0}^{\infty} y_i \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right)$$

$$E(Y_i) = \sum_{y_i=1}^{\infty} y_i \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right)$$

2. Variansi dari $Y_i$dengan menggunakan $Var(Y) = E(Y^2) - [(E(Y)]^2$ Karena $Y_i$memiliki fungsi distribusi probabilitas seperti yang tertera pada Persamaan (2.11), sehingga diperoleh:

$$E(Y_i^2) = \sum_{y_i=0}^{\infty} y_i^2 \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right)$$

$$E(Y_i^2) = \sum_{y_i=1}^{\infty} y_i^2 \left(\frac{\mu_i}{1+\alpha\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\alpha y_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\alpha y_i)}{1+\alpha\mu_i}\right)$$

Hubungan nilai rata-rata dan varians dalam *Generalized Poisson Regression* dapat dikondisikan, jika nilai varians sama dengan nilai rata-rata atau $E(Y_{i)} = Var(Y_i)$ maka nilai parameter disperse $\alpha = 0$, sehingga fungsi densitas peluang *Generalized Poisson Regression* akan diturunkan ke regresi poisson dan jika nilai varians lebih besar dari nilai rata-rata $EY_i < VarY_i$ maka nilai parameter disperse $\alpha > 0$, sehingga dapat dikatakan pada data terjadi overdispersi dan jika nilai varians lebih kecil dari pada nilai rata-rata $EY_i > VarY_i$, maka nilai parameter disperse $\alpha < 0$, sehingga pada data terjadi underdispersi (Ruliana, 2015).

Dengan mensubtitusikan $\mu_i = \exp(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji})$ ke dalam persamaan (2.11) maka diperoleh:

$$f_i(y_i|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}: \mu_i, \alpha)$$

$$= \left[\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right]^{y_i} \frac{(1 + \alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left[\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right] \qquad (2.12)$$

$y_i = 0, 1, 2, \dots, n$ sedangkan $\beta = \left[\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\right]^T$ menyatakan vektor dari parameter-parameter yang tidak diketahui.

2.4.1 Estimasi Prameter Model *Generalized Poisson Regression*

Berdasarkan penggunaan *Generalized Poisson Regression*, nilai dari parameter- parameter yang tidak diketahui, yaitu $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha$ harus ditaksir. Untuk menaksir parameter tersebut digunakan metode *maximum likelihood* (Rusianti, 2016).

Umumnya penaksiran parameter model *Generalized Poisson Regression* memiliki langkah yang sama dengan penaksiran parameter pada model regresi Poisson, yaitu: fungsi likelihood diperoleh dengan mengalikan semua fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i diberikan nilai $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}$ pada (2.12), yaitu:

1. Membentuk fungsi *Likelihood* berdasarkan persamaan (2.12)

   Fungsi *Likelihood* untuk model *Generalized Poisson Regression* dapat diperoleh dengan mengalikan semua fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i oleh x_i sehingga

$$L(\beta^*) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i\,|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}\,;\, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right]^{y_i} \frac{(1 + \alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left[\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right]$$

2. Membentuk fungsi *log likelihood* dari fungsi *Likelihood* yang untuk mempermudah perhitungan mendapatkan taksiran maksimum likelihood dari parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ dan parameter α digunakan fungsi *log likelihood* sebagai berikut:

$$l(\beta^*) = L(\beta^*)$$

$$= log\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right]^{y_i} \frac{(1 + \alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left[-\frac{\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji})}\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} log\left[\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right]^{y_i} \frac{(1 + \alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left[-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} log\left[\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right]^{y_i} + log\frac{(1 + \alpha y_i)^{y_i - 1}}{y_i!}\left[-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[log\left[\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right]^{y_i} + (y_i - 1)log(1 + \alpha y_i)\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right] - \log(y_i!)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i\left(log\left(\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right) - \log\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\right)\right.$$
$$\left. + (y_i - 1)log(1 + \alpha y_i) + \left[-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right] - \log(y_i!)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right) - y_i log\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right) + (y_i - 1)log(1 + \alpha y_i)\right.$$
$$\left. - \left[\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right] - \log(y_i!)\right]$$

3. Mendiferensialkan fungsi *log likelihood* yang telah diperoleh untuk mencari taksiran maksimum likelihood fungsi *log likelihood* $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p, \alpha$ fungsi *Likelihood* diturunkan secara parsial terhadap parameter $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p, \alpha$ dan disamakan dengan nol sebagai berikut:
   a. Mendiferensialkan fungsi *log likelihood* terhadap β_0

$$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_0} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - y_i\frac{\alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)} - \frac{(1 + \alpha y_i)\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1 + \alpha y_i)\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i - \frac{y_i\,\alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right) - \frac{(1 + \alpha y_i)\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i - \frac{y_i\,\alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right) - \left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right) + \alpha y_i\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + \alpha\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\left(1+\alpha\exp\ \exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2 y_i - 1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right) y_i \alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)+\alpha y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)\right] = 0$$

b. Mendiferensialkan fungsi *log likelihood* terhadap β_1

$$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i x_{1i} - y_i x_{1i}\frac{\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)} - \frac{(1+\alpha y_i)x_{1i}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\alpha x_{1i}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+\alpha y_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i x_{1i}\left(1-\frac{\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right) - \frac{(1+\alpha y_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i x_{1i}\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2 - y_i x_{1i}\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1+\alpha y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)\right] = 0$$

Dengan cara yang serupa maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{ki}(y_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right) = 0\ , \qquad k = 2,3,\dots,p$$

$$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)} + \left(\frac{y_i(y_i-1)}{1+\alpha y_i}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right) - \exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+\alpha\exp\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}\right)\right)$$

Dengan $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ menyatakan parameter-parameter yang tidak diketahui dan dalam hal perhitungan iterasi digunakan *software* untuk memperoleh nilai taksiran β. Model *Generalisasi Poisson Regression* adalah

$$\mu_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) = e^{\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\cdots+\beta_p X_{pi}}$$

$$= e^{\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_{ji}\right)}$$

2.5 Uji Kesesuaian *(Uji Goodness of Fit)*

Pengujian kesesuaian model untuk mengetahui model yang digunakan sesuai atau tidak dengan data yang diamati (Syam, 2017). Uji ini didasarkan pada seberapa baik kesesuaian/kecocokan antara frekuensi pengamatan yang diperoleh data sampel dengan frekuensi harapan yang diperoleh dari distribusi yang dihipotesiskan.

Uji ketepatan pada model regresi Poisson dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu *Pearson Chi-Square* dan *Deviance* (Irwan, 2013). Dalam hal ini penulis menggunakan Deviance dalam uji ketepatan model regresi Poisson. Dalam kasus ini akan ditunjukkan bahwa model yang didapat sesuai dengan data yang diamati atau tidak sesuai dengan menggunakan software SPSS 17.0.

Menurut Irwan (2013), devians dapat diartikan sebagai logaritma dari uji Likelihoodnya, yaitu seperti pada persamaan (2.13)

$$D = -2ln\left[\frac{L(y,\mu)}{L(y,y)}\right]$$
$$= 2[lnL(y,\mu) - lnL(y,y)] \quad (2.13)$$

Berdasarkan persamaan (2.14), $L(y,\mu)$ adalah fungsi likelihood current model sedangkan $L(y,y)$ adalah fungsi likelihood saturated model dari distribusi Poisson. Adapun fungsi log likelihood current modelnya ditunjukkan pada persamaan (2.14)

$$L(y,\mu) = lnL(y,\mu)$$
$$= ln\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\mu}\lambda^{y}}{y!}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(yln\mu - \mu - lny!) \quad (2.14)$$

Sedangkan untuk fungsi log likelihood saturated modelnya ditunjukkan pada persamaan (2.15)

$$L(y,y) = lnL(y,y)$$
$$= ln\prod_{i=1}^{n}f(y,y)$$
$$= ln\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-y}\lambda^{y}}{y!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ylny - y - lny!) \tag{2.15}$$

Dengan demikian nilai Devians dapat diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (2.14) dan (2.15) ke persamaan (2.13) sehingga diperoleh

$$D = 2[lnL(y,\mu) - lnL(y,y)]$$

$$= 2\left[\sum_{i=1}^{n} (ylny - y - lny!) - \sum_{i=1}^{n} (yln\mu - \mu - lny!)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \left\{yln\frac{y}{\mu} - (y - \mu)\right\}$$

karena $\sum_{i=1}^{n} (y - \mu) = 0$ maka statistik uji Devians untuk model regresi Poisson pada persamaan (2.16)

$$D = 2\sum_{i=1}^{n} \left\{yln\frac{y}{\mu}\right\} \tag{2.16}$$

Hipotesis

H_0 : Model yang didapat tidak sesuai dengan data yang diamati

H_1 : Model yang didapat sesuai dengan data yang diamati

Taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$

Kriteria pengujian

Tolak H_0 jika $D > x^2{}_{\alpha,(n-k-1)}$ yang artinya model yang didapat sesuai dengan data yang diamati.