BAB II

LANDASAN TEORI

Pada Bab II ini membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun teori-teori pendukung tersebut antara lain antara lain tentang matriks, determinan matriks, Metode Perhitungan Matriks, Sifat-Sifat Determinan Matriks Bujur Sangkar dan determinan Radic.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

adapun notasi singkat untuk penulisan matriks di atas adalah sebagai berikut

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{atau} \quad [a_{ij}]$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai determinan matriks.

2.2 Determinan Matriks

Subbab ini akan membahas mengenai definisi determinan matriks.

Definisi 2.2 (Anton, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. *Fungsi Determinan (determinant function)* dinotasikan dengan *det* dan kita mendefenisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut *determinan dari A (determinant of A).*

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar, antara lain metode Sarrus, metode ekspansi kofaktor, dan metode reduksi baris. Tetapi pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode Sarrus. Berikut akan dibahas mengenai metode Sarrus.

2.2.1 Metode Sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode Sarrus hanya dapat digunakan pada matriks 2×2 dan 3×3

Determinan matriks orde 2×2

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ maka } |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$- \qquad +$$

Contoh 2.1 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

maka :

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(8) - (1)(7)$$

$$= 24 - 7$$

$$= 17$$

Jadi, $\det(A) = 17$.

Determinan matriks orde 3×3

Langkah-langkah untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar A dengan menggunakan metode Sarrus sebagai berikut (T. Sutojo dkk, 2010):

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua kemudian tempatkan disebelah kanan tanda determinan.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg|$$

2. Hitunglah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama, dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(+)$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg|$$

$$A(+) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(-)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$A(-) = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinan matriks A adalah selisih antara $A(+)$ dan $A(-)$.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad - \quad - \quad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \\ \qquad + \quad + \quad + \end{array}$$

sehingga:

$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} +$
$a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$

Contoh 2.2 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

maka:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$$= [(1).(1).(1) + 2.4.1 + 3.0.2] - [(1.(1).3 + 2.4.1 + 1.0.2]$$

$$= (1 + 8 + 0) - \big((3) + 8 + 0\big)$$

$$= 9 - (11)$$

$$= -2$$

Jadi, $\det(A) = -2$.

2.3 Sifat-Sifat Determinan Matriks Bujur Sangkar

Teorema 2.1 (Anton, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.

1. Jika A memiliki satu baris atau kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.
2. $\det(A) = \det(A^T)$.

Contoh 2.3 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka :

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (4)(0) - (7)(0)$$

$$= 0$$

Jadi, $\det(A) = 0$.

Contoh 2.4 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

maka:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(0) - (3)(4)$$

$$= 0 - 12$$

$$= -12$$

dan

$$\det(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(0) - (4)(3)$$

$$= 0 - 12$$

$$= -12$$

Jadi, $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema 2.2 (Anton, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$.

1. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau kolom dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka $\det(B) = k\det(A)$.
2. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.

Contoh 2.5 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 24 & 22 \end{bmatrix} \text{ dan skalar } k = 2.$$

maka :

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$$
$$= (14)(11) - (15)(12)$$
$$= 154 - 180$$
$$= -26$$

dan

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 24 & 22 \end{bmatrix}$$
$$= (14)(22) - (14)(24)$$
$$= 308 - 360$$
$$= -52$$

Jadi, $\det(B) = 2\det(A) = 2(-26) = -52$.

Contoh 2.6 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

maka:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= (8)(3) - (6)(7)$$
$$= 24 - 42$$
$$= -18$$

dan :

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= (6)(7) - (8)(3)$$
$$= 42 - 24$$
$$= 18$$

Jadi, $\det(B) = -\det(A) = 18$.

Teorema 2.3 (Anton, 2004) Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar dengan ukuran yang sama, maka:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Contoh 2.7 :

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 2×2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } AB = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix},$$

maka:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= (1)(5) - (3)(4)$$
$$= 5 - 12$$
$$= -7$$

dan

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= (5)(3) - (9)(2)$$
$$= 15 - 18$$
$$= -3$$

sehingga :

$$\det(AB) = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 30 & 51 \end{bmatrix}$$
$$= 561 - 540$$
$$= 21$$

Jadi, $\det(AB) = \det A \,.\det B = 21$.

2.4 Determinan Radic

Definisi 2.3 (Radic, 2005) Determinan dari matriks A berukuran $m \times n$ dengan kolom $A_1, A_2, \cdots A_n$ dan $m \leq n$, adalah jumlah

$$\sum_{1\leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} (-1)^{r+s} \; |A_{j1}\; A_{j2}\; \cdots \;\; A_{jm}| \qquad (2.3)$$

Dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m \; dan \; s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$

Berikut diberikan contoh mengenai determinan Radic.

Contoh 2.8 :

Diberikan sebuah matriks dengan ukuran 1×3 sebagai berikut :

$$[a_1\; a_2\; a_3]$$

Maka dengan menggunakan Definisi 2.3 di peroleh :

$$|a_1\; a_2\; a_3| = (-1)^{1+1}a_1 + (-1)^{1+2}a_2 + (-1)^{1+3}a_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

Contoh 2.9 :

Diberikan sebuah matriks dengan ukuran 2×3 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Maka dengan menggunakan Definisi 2.3 diperoleh:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & b_3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan aturan kofaktor pada baris 1 diperoleh

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1}|\mathrm{b}_2 \quad \mathrm{b}_3| + \mathrm{a}_2(-1)^{1+2}|\mathrm{b}_1 \quad \mathrm{b}_3| \;\; +$$

$$\mathrm{a}_3(-1)^{1+3}|\mathrm{b}_1 \quad \mathrm{b}_2|$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 - (a_1b_3 - a_3b_1) + a_2b_3 - a_3b_2$$

Sehingga diperoleh $|b_i \quad b_j| = b_i - b_j$ dari Persamaan 2.3

Selanjutnya jika $m = 2$ pada Persamaan 2.3 maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{1+2+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

Contoh 2.10 :

Diketahui matriks persegi panjang dengan ukuran 2×5 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

maka $\det(A)$ dengan menggunakan Persamaan 2.4 diperoleh :

$$\det(A) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+5)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} +$$

$$(-1^{(1+2)+(2+3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + (-1^{(1+2)+(2+4)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} +$$

$$(-1^{(1+2)+(2+5)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + (-1^{(1+2)+(3+4)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} +$$

$$(-1^{(1+2)+(3+5)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + (-1^{(1+2)+(4+5)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= (-4) — 4 + (2) — 12 + (-2) - (2) + (-4) + (2) - (2) + (-2)$$

$$= 6.$$