BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diperensial

Suatu persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel terikat (dependent variable) terhadap satu atau lebih variabel bebas (Independent variable) disebut persamaan diferensial. Secara garis besar persamaan diferensial dapat dikelompokkan kedalam dua kelompok yaitu:

a. Persamaan diferensial biasa (Ordinary differential equation) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya mempunyai satu peubah bebas, peubah bebas biasanya disimbolkan dengan x.
b. Persamaan diferensial parsial (Partial diferential equation) adalah persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih peubah bebas (Rinaldi, 2013).

Definisi 2.1 (Roni, 2011) diberikan fungsi f : $R^n \to R^n$ dengan f= $(f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in R^n$. Fungsi f dikatan diferensiabel di $x_0 \in R^n$ jika terdapat transformasi linier D f $(x_0) \in (R^n)$ dengan $L(R^n)$ menyatakan himpunan semua operator linier pada R^n sehingga:

$$lim_{h \to 0} \frac{\|f\,(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} = 0 \qquad (2.1)$$

D $f(x_0)$ disebut turunan f di x_0 dan $h \to R^n$. Jika suatu fungsi diketahui diferensiabel maka turunan parsialnya selalu ada. Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial maka akan membentuk sistem persamaan diferensial. Diberikan persamman diferensal:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, x) \qquad (2.2)$$

Dengan $\dot{x}$=$\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, f=$(f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, dan x=$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$

Sistem persamaan diferensial (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \qquad (2.3)$$

Dengan f_1 adalah fungsi kontinu pada $[a, b]$ dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ untuk $= 1, 2, \dots, n$.

Bentuk sistem persamaan differensial linear dengan n fungsi tak diketahui dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \qquad (2.4)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,$$

Selanjutnya sistem persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (2.5)$$

Dengan A matrik ukuran $n \times n$, $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right]^T$$

$$\vdots$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Jika sistem persamaan diferensial (2.3) tidak dapat dibentuk menjadi persamaan (2.5) maka sistem persamaan diferensial (2.3) disebut sistem persamaan diferensial non linier. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan dalam persamaan (2.2) maka $\bar{x}$ titik equilibrium dari persamaan (2.2). Suatu sistem dinamik dikatakan setimbang jika sistem tidak berubah sepanjang waktu.

Secara formal titik kesetimpangan (equilibrium) dari sistem (2.2) didefenisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (**Meiss, 2007**) titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimpangan (titik equilibrium) sistem (2.2) jika $f\ (\bar{x}) = 0$.

Teorema 2.1 (Subiono, 2010) Diberikan persamaan diferensial $\frac{dx}{dt} = Ax$ dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki nilai k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotis, jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_1) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
b. Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil, jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_1) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
c. Titik equilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $\Re_e(\lambda_1) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

2.2 Matriks Jacobi

Pandangan kembali sistem persamaan diferensial non linier (2.3):

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maka dengan menghitung turunan parsial masing-masing $f_1, f_2, \dots, f_n$, didapat bentuk matriks Jacobiannya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriks yang diatas adalah matriks yang berukuran $n \times n$, matriks ini sering kali ditulis sebagai matriks $J(x)$:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right]_{i,j} \qquad (2.6)$$

Contoh 2.1:

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1 x_2$$

$$\frac{df_2}{dt} = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

Tentukan titik equilibrium dari sistem persamaan diferensial berikut beserta kestabilannya:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1 x_2$$

$$x_1 x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Dan

$$\frac{df_2}{dt} = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$$

$$0 + {x_2}^2 = 0$$

$${x_2}^2 = 0$$

Didapat titik equilibriumnya $(x_1, x_2) = (0,0)$

Misalkan:

$$\frac{df_1}{dt} = x_1 x_2 = g_1$$

$$\frac{df_2}{dt} = {x_1}^2 + {x_2}^2 = g_2$$

Dengan menurunkan x_1 dan x_2 terhadap g_1 dan g_2 maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2x_2$$

Matriks jacobian dari x_1 dan x_2 menjadi:

$$J(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

Maka berdasarkan teorema 2.1 dapat disimpulkan (0,0) stabil karena nilai $\Re e(\lambda_{1,2}) = 0$.

2.3 Nilai Eigen

Definisi 2.3 (Anton Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$, maka matriks vektor x yang tidak nol di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari matriks A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x_1$$

Untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A dan x disebut sebagai vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ. Diketahui bahwa $\lambda = \lambda I$, maka subtitusikan kedalam $Ax = \lambda x$ menghasilkan:

$$Ax = \lambda I x$$

Atau,

$$\det (A - \lambda I)x = 0.$$

Berikut diberikan contoh mengenai nilai eigen.

Contoh 2.2:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A .

Penyelesaian:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2)(-\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 4$$

Sehingga nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 4$.

Untuk $\lambda_1 = -2$,

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3+2 & 3 \\ -2 & 1 & 1+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

Bila persamaan tersebut dijumlahkan diperoleh $4x_1 + 4x_2 = 0$ atau $x_1 = -x_2$

Bila persamaan tersebut dikurangkan diperoleh $-6x_2 - 6x_3 = 0$ atau $-x_2 = x_3$

Misalkan $x_3 = -s$, dan $x_2 = s$, maka $x_1 = -s$

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ -s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -2$ adalah

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Begitu juga untuk $\lambda_2 = 2$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3-2 & 3 \\ -2 & 1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + x_2 - 1x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Misalkan $x_1 = s$, dan $x_2 = s$, maka $x_3 = -s$

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh vektor eigennya $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jadi, vektor eigen yang bersesuain dengan $\lambda_3 = 4$ adalah

$$x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Metode Runge Kutta orde-4

Penyelesaian persamaan diferensial biasa (*ordinary diferensial equation*) dengan metode Runge Kutta orde 4 adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(x, y)$ yang diketahui dengan menggunakan persamaan umum di bawah ini.

Diberikan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.8)$$

Dengan

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{2.9}$$

$$k_2 = hf(x_n + \tfrac{k_1}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}) \tag{2.10}$$

$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{k_2}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2}) \tag{2.11}$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3 y_n + h, k_3) \tag{2.12}$$

Contoh 2.3:

Selesaikan sistem persamaan diferensial dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 sampai interasi 1

$$\frac{dx}{dt} = x + xy$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

Dengan

$$y_0 = 1{,}5$$

$$x_0 = 0$$

$$h = 0{,}05$$

Misalkan:

$$f(x, y) = x + xy$$

$$g(x, y) = x + y$$

Rumus interasi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(I + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$= hf(x_0, y_0)$$

$$= hf(0{,}1.5)$$

$$= (0{,}05)\big(0 + 0(1.5)\big) = 0$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$= hf(x_0 + \tfrac{k_1}{2}, y_0 + \tfrac{I_1}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \tfrac{0}{2}\right) + \left(0 + \tfrac{0}{2}\right)\left(1{,}5 + \tfrac{0{,}075}{2}\right)\right) = 0$$

$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{k_2}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2})$$

$$= hf(x_0 + \tfrac{k_2}{2}, y_0 + \tfrac{k_2}{2})$$

$$= 0{,}05\left(\left(0 + \tfrac{0}{2}\right) + \left(0 + \tfrac{0}{2}\right)\left(1{,}5 + \tfrac{0{,}076875}{2}\right)\right) = 0$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3 y_n + h, k_3)$$

$$= f(x_0 + hk_3 y_0 + h, k_3)$$

$$= 0{,}05\left(\big(0 + 0{,}05(0)\big) + \big(0 + 0{,}05(0)\big)\big(1.5 + 0{,}05(0)\big)\right) = 0$$

$$x_1 = 0 + \tfrac{1}{6}(0 + 2(0) + 2(0) + 0) = 0$$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$I_1 = hg(x_n, y_n)$$

$$= hg(x_0, y_0)$$

$$= g(0{,}1.5)$$

$$= (0{,}05)\big(0 + (1.5)\big) = 0{,}075$$

$$I_2 = hg(x_n + \tfrac{k_1}{2}, y_n + \tfrac{I_2}{2})$$

$= hg(x_0 + \frac{k_1}{2}, y_0 + \frac{I_2}{2})$

$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(1{,}5 + \frac{0.075}{2}\right)\right) = 0{,}076875$

$I_3 = hg(x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{I_2}{2})$

$= hg(x_0 + \frac{k_2}{2}, y_0 + \frac{I_2}{2})$

$= 0{,}05\left(\left(0 + \frac{0}{2}\right) + \left(1{,}5 + \frac{0.076875}{2}\right)\right) = 0{,}076921875$

$I_4 = hg(x_n + hk_3, y_n + hI_3)$

$= hg(x_0 + hk_3, y_0 + hI_3)$

$= 0{,}05\left(\left(0 + 0.05(0)\right) + \left(1.5 + 0.05(0{,}076921875)\right)\right)$

$= 0{,}0751923047$

$$y_1 = 1.5 + \frac{1}{6}(0{,}075 + 2(0.076875) + 2(0{,}076921875) + (0{,}0751923047)$$

$= 1{,}5762976757$

Jadi didapat $(x_1, y_1) = (0{,}1.5762976757)$