BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Sistem persamaan (2.1) dari dibentuk matriks yaitu:

$$
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix},
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}
$$

Selanjutnya persamaan (2.2) dinotasikan:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan} a_{ij} \epsilon \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},
$$

Diperoleh system persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ diferensial dari matriks $[dx_1 dx_2 \ \dots \ dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \quad (2.3)$$

Untuk memahami persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)$ untuk $f_1 = 4x_1 + 10x_2$ dan $f_2 = 2x_1 + 5x_2$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 10x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 10x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 5x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 y_2 \ \dots \ y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T \boldsymbol{y}. \quad (2.4)$$

Selanjutnya untuk memahami persamaan (2.4), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & + & 3x_2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 \end{bmatrix} \\
&= y_1(x_1 + 3x_2) + y_2(2x_1 + 4x_2) \\
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & + & 2y_2 \\ 3y_1 & + & 4y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= A^T \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

Jika matriks A adalah simetri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.5}$$

Untuk memahami persamaan (2.5), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1(2x_1 + 4x_2) + x_2(4x_1 + 6x_2) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_1}}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_2}}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 8x_2 \\ 8x_1 & + & 12x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2A\boldsymbol{x}$$

2.2 Kestabilan Sistem Diskrit

Berdasarkan (Ogata, 1995) akan diberikan definisi untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Ogata, 1995) diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k\boldsymbol{x}_k, \tag{2.6}$$

dengan x_k adalah vektor *state* dan A adalah matriks non singular nxn, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S_k simetri dan positif definit yang memenuhi:

$$A_k^T S_k A_k - S_k = -Q_{k,} \tag{2.7}$$

dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.6:

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut:

$$A_k^T S_k A_k - S_k = -Q_{k,}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} - s_{22} \\ -1.5s_{12} - s_{22} & 0.25s_{11} + s_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut:

$$s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} - s_{22} = 0$$

$$0.25s_{11} + s_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = 4,\ s_{12} = -2,\ s_{22} = 3$ dan dapat dibentuk menjadi :

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matrik definit positif sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

$\lambda_1 = 1.44$ dan $\lambda_2 = 5.56$

dari matriks diatas didapat: $\lambda_1 = 1.44,$ dan $\lambda_2 = 5.56,$ karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks diatas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

2.3 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab yang ketiga ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit.

2.3.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu diskrit sistem dinamis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \qquad k = 1,2,\dots,n \tag{2.8}$$

dengan kondisi awal x_0, dengan x_k adalah vektor berukuran n dan kontrol input u_k adalah vektor berukuran *m*.

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J}_i = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{k=i}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.9}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton:
$$H^k = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.10}$$

Persamaan *state*:
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \qquad k = i,\dots,N-1, \tag{2.11}$$

Persamaan *kostate*:
$$-\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \qquad k = i,\dots,N-1, \tag{2.12}$$

Kondisi *stasioner*:
$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \qquad k = i,\dots,N-1, \tag{2.13}$$

2.3.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit Lingkar Tertutup

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik, didefinisikan persamaan linier sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k, \tag{2.14}$$

dengan $x_k \epsilon\, \mathbb{R}^n$ dan $u_k \epsilon\, \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut:

$$J_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^T S_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k), \tag{2.15}$$

Pada persamaan (2.15) diasumsikan Q, R, dan S_N adalah matriks simetri semi definite positif dan $R_k \neq 0$ untuk semua k.

Persamaan Hamilton : $H^k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R_k \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k)$,(2.16)

Kemudian persamaan (2.15) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k,$ (2.17)

Persamaan *costate*: $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{x}_k} = Q_k \boldsymbol{x}_k + A_k^T \lambda_{k+1},$ (2.18)

Kondisi satsioner: $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R_k \boldsymbol{u}_k + B_k^T \lambda_{k+1},$ (2.19)

Menurut persamaan (2.19) diperoleh:

$$\boldsymbol{u}_k = -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}, \tag{2.20}$$

Kemudian persamaan (2.20) subtitusikan kepersamaan (2.17):

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k - B_k R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}, \tag{2.21}$$

Menurut **Ogata (1995)**:

$$\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.22}$$

Gunakan persamaan (2.22) ke dalam (2.21) untuk mendapatkan persamaan:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k - B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.23}$$

Pemecahan untuk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ menghasilkan:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I + B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1})^{-1} A_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.24}$$

Substitusikan persamaan (2.22) dengan persamaan c*ostate* (2.18):

$$S_k \boldsymbol{x}_k = Q_k \boldsymbol{x}_k + A_k^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.25}$$

Substitusikan persamaan (2.24) dengan persamaan (2.25):

$$S_k = A_k^T S_{k+1}(I + B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1})^{-1} A_k + Q_k, \qquad (2.26)$$

Gunakan invers matrik:

$$S_k = A_k^T [S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^T S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T S_{k+1}] A_k + Q_k, \qquad (2.27)$$

Kemudian persamaan (2.27) dapat dibentuk:

$$S_k = A_k^T (S_{k+1}^{-1} + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k + Q_k, \qquad (2.28)$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi S_k kemudian dari persamaan (2.18) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{k+1} = (A_k^T)^{-1}(\lambda_k - Q_k \boldsymbol{x}_k), \qquad (2.29)$$

Berdasarkan persamaan (2.22) maka persamaan (2.29) menjadi:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= (A_k^T)^{-1}(S_k \boldsymbol{x}_k - Q_k \boldsymbol{x}_k) \\ &= (A_k^T)^{-1}(S_k - Q_k)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.30) kepersamaan (2.20) menjadi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_k &= -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1} \\ &= -R_k^{-1} B_k^T (A_k^T)^{-1}(S_k - Q_k)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Persamaan (2.31) dapat disederhanakan menjadi:

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k \boldsymbol{x}_{k,}$$

dimana:

$$K_k = -R_k^{-1} B_k^T (A_k^T)^{-1}(S_k - Q_k)\boldsymbol{x}_k.$$

2.4 Representasi State Untuk Sistem Waktu Diskrit

Menurut **Ogata (1995)** diberikan persamaan karakteristik dinamik diskrit sebagai berikut:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \qquad (2.32)$$

dengan *u(k)* sebagai input dan *y(k)* sebagai output dari sebuah sistem pada k. a_i untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan b_j untuk $j = 0,1,2,\dots,n$.

Kemudian didefinisikan transformasi *z* sebagai berikut:

$$x(k) = x(z) \text{ dan } x(k-i) = z^{-i} x(z)$$

maka persamaan (2.32) menjadi:

$$y(z) + a_1 z^{-1} y(z) + \cdots + a_n z^{-n} y(z) = b_0 u(z) + b_1 z^{-1} u(z) + \cdots + b_n z^{-n} u(z)$$

$$y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) = u(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n})$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \qquad (2.33)$$

Menurut Ogata (1995) persamaan (2.33) merupakan persamaan *pulse transfer*. Persamaan (2.33) dapat diubah kebentuk kanonik diagonal yaitu:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (2.34)$$

dengan persamaan output yaitu:

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \qquad (2.35)$$

Contoh 2.7:

Diberikan sebuah fungsi *pulse transfer*

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 + 1{,}3\,z + 0{,}4}$$

Bentuklah persamaan tersebut kebentuk kanonik

Penyelesain :

Fungsi pulse transfer dapat dirubah menjadi

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{5}{3}}{z + 0{,}5} + \frac{-\frac{2}{3}}{z + 0{,}8}$$

Oleh karena itu bentuk kanonik adalah

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$