BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori ini terdiri atas beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks toeplitz kompleks ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987) Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks. Ukuran (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Notasi nama matriks biasanya menggunakan huruf kapital dan cetak tebal. Jika A adalah sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan entri atau elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Jadi, matriks dengan ukuran $m \times n$ beserta entri-entrinya secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A = [a_{ij}], \; i = 1, 2, \dots, m \,; j = 1, 2, \dots, n$$

Berdasarkan ukuran dan elemennya terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya sebagai berikut (Anton, 1987: 23-66) :

a. Matriks Simetris (*simetric matrix)*

Suatu matriks bujur sangkar dikatakan simetris jika $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai dari i dan j. (Anton,1987)

Matriks yang terdiri atas m baris dan n kolom dinamakan matriks berukuran $m \times n$ atau matriks berordo $m \times n$ dengan demikian baris dan kolom suatu matriks menunjukkan ukuran atau ordo dari matriks yang bersangkutan.

Bentuk matriks simetris untuk ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b. Matriks Toeplitz

Matriks Toeplitz adalah matriks simetris dimana setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada superdiagonal utamanya adalah sama dan subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. (Robert, 2005). Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

c. Matriks tridiagonal (*tridiagonal matrix*) yaitu matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri dan kanan diagonal utamanya bernilai tidak sama dengan nol. Bentuk umum dari matriks tridiagonal adalah sebagai berikut (Fuzhen Zhang, 2011) :

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & a \end{bmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A oleh c.

Jika c adalah suatu bilangan skalar dan $A = a_{ij}$ maka matriks $cA = (ca_{ij})$ yaitu suatu matriks cA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan c. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan didepan atau dibelakang matriks. Misalnya $[C] = c[A] = [A]c$

Contoh 2.1 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari $2A$.

Penyelesaian:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka $2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian $AB \neq BA$. Perkalian matriks dengan matriks dapat dilakukan apabila jumlah kolom dari matriks pertama harus sama dengan jumlah baris dari matriks kedua. Jika syarat di atas tidak terpenuhi maka matriks tersebut tidak dapat dikalikan.

Definisi 2.3 (Yahya dkk, 2004) Jika matriks $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $p \times q$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks berukuran $q \times r$, maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran $p \times r$ dimana:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} \tag{2.1}$$

Untuk setiap $i = 1,2, \dots, p$ dan $j = 1,2, \dots, r$.

Contoh 2.2: Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & b_{q3} & \cdots & b_{qr} \end{bmatrix}$$

Maka, $A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{21} & a_{13}b_{31} & \cdots & a_{1q}b_{q1} \\ a_{21}b_{12} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{32} & \cdots & a_{2q}b_{q2} \\ a_{31}b_{13} & a_{32}b_{23} & a_{33}b_{33} & \cdots & a_{3q}b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}b_{1r} & a_{p2}b_{2r} & a_{p3}b_{3r} & \cdots & a_{pq}b_{qr} \end{bmatrix}$

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi:

$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\text{ faktor}} \quad (n > 0)$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah:

$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\text{ faktor}}$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.4.

Teorema 2.1 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

a) $A^r A^s = A^{r+s}$.
b) $(A^r)^s = A^{rs}$.

2. 3 Determinan Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 1987) Misalkan A adalah matriks bujursangkar, fungsi determinan dinyatakan dengan det dan didefinisikan $det\,(A)$ sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer bertanda dari A. Jumlah $det\,(A)$ dinamakan determinan A.

$$det\,(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{1j_2} \dots a_{1j_n}. \qquad (2.2)$$

Terdapat beberapa metode dalam menentukan determinan matriks diantaranya adalah metode sarrus. Perhitungan determinan matriks dengan metode Sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks berukuran (2×2) dan (3×3).

Untuk menghitung determinan matriks $A_{3\times3}$. Perhitungannya adalah sebagai berikut:

Contoh 2.3 diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ carilah nilai determinannya.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Persamaan (2.2) maka diperoleh:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

2.4 Bilangan Kompleks

Definisi 2.6 (Murray, 1964) Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan real, yang dinyatakan dengan $z = x + yi$ dimana x dan y adalah bilangan real, dan i adalah bilangan imajiner yang mempunyai sifat $i^2 = -1$. Bilangan real x disebut juga bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan riil y disebut bagian imajiner dari bilangan kompleks.

Berikut ini adalah beberapa operasi pada bilangan kompleks:

a) Penjumlahan bilangan kompleks

Untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ jumlah didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

b) Pengurangan bilangan kompleks

Untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ pengurangan didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

c) Pembagian bilangan kompleks

Untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ pembagian didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$= \frac{x_1x_2 - x_1iy_2 + x_2iy_1 - i^2y_1y_2}{{x_2}^2 - x_2iy_2 + x_2iy_2 - i^2{y_2}^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)i + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)i}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

d) Perkalian bilangan kompleks

Untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ jumlah didefinisikan sebagai berikut:

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + x_1(y_2 + x_2iy_1 - i^2y_1y_2$$

$$= x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i - y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

2.5 Pemangkatan Bilangan Kompleks

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x + iy = (x, y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk polar, yaitu $z = (r, \theta)$. Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \text{ dengan } \theta = arc\tan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ dan } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jadi, bentuk polar bilangan kompleks z adalah $z = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\,sin\theta)$ dan akar sekawan dari z adalah $z = (r, -\theta) = r(\cos\theta - i\,sin\theta)$.

Jika $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka diperoleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut:

$$z_1z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Jika diketahui:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$\vdots$$

$z_n = r_n(\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$, untuk n bilangan asli

Maka diperoleh hasil perkalian:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Akibatnya jika, $z = r(\cos\theta - i\, sin\theta)$ maka

$$\underbrace{z.z.z \dots z}_{n \text{ kali}} = \underbrace{r.r.r \dots r}_{n \text{ kali}} [\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + i(\sin(\theta + \theta + \cdots + \theta))]$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \tag{2.3}$$

2.6 *Trace* Matriks

Definisi 2.7 (Gentel, 2007) Misalkan $A = [a_i]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2.4}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 22 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 12 \\ 2 & 19 & 3 \end{bmatrix}$ hitunglah nilai *trace* dari matriks A?

Penyelesaian:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$= 22 + 0 + 3$$

$$= 25$$

Teorema 2. 2 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

a. $tr(A) = tr(A^T)$
b. $tr(cA) = tr(A)$
c. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
d. $tr(AB) = tr(BA)$

Bukti:

Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (2.5)

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(B) = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}$ (2.6)

a. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (2.7)

Berdasarkan Persamaan (2.4) dan (2.6) maka terbukti $tr(A) = tr(A^T)$.

b. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = ctr(A)$, untuk c adalah sebarang skalar, diperoleh:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$tr(cA) = ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \qquad (2.8)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \\ &= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \\ &= ctr(A) \end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $tr(cA) = tr(A)$.

c. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B diperoleh:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sehingga

$$tr(A + B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn} \qquad (2.9)$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} tr(A + B) &= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{nn} \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}) \\ &= tr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

d. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. Berdasarkan matriks A dan B diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \quad (2.10)$$

selanjutnya

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \quad (2.11)$$

Sehingga diperoleh

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn})$$

$$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn})$$
$$= tr(AB)$$

Oleh karena itu terbukti $tr(AB) = tr(BA)$.

Contoh 2.5 Tentukan $tr(A^4)$ dari $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* dari matriks A diatas, maka matriks tersebut harus dikalikan sebanyak 4 kali, sebagai berikut:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -16 & 29 \\ -13 & 11 & -11 \\ 16 & -12 & 23 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 24 & -16 & 29 \\ -13 & 11 & -11 \\ 16 & -12 & 23 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 & -122 & 255 \\ -85 & 59 & -28 \\ 122 & -90 & 165 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} 170 & -122 & 255 \\ -85 & 59 & -28 \\ 122 & -90 & 165 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1312 & -728 & 1763 \\ -456 & 285 & -575 \\ 908 & -664 & 1221 \end{bmatrix}$$

dari perkalian A diatas sehingga diperoleh :

$tr(A^4) = 1312 + 285 + 1221 = 2818.$

2.7 *Trace* Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Titik Fatonah, dengan judul "*Trace* Matriks yang Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif", pada tahun 2017. Isi skripsinya membahas tentang rumusan umum *tarce* dari matriks khusus 2×2 dengan entri bilangan kompleks berpangkat bilangan bulat positif. Berikut adalah langkah-langkah pembentukkan persamaan:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a+bi \\ a+bi & 0 \end{bmatrix}, \forall\ a, b \in R$ dan $i =$ imajiner.

   Berdasarkan Definisi 2.5 dan Definisi 2.7 diperoleh:

$$\det(A) = 0 - (a+bi)(a+bi) = -(a+bi)^2 \tag{2.12}$$

   dan

$$tr(A) = 0 + 0 = 0 \tag{2.13}$$

2. Menentukan bentuk umum A^n dengan n ganjil dan n genap.

Sebelum menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ berpangkat bilangan bulat positif, maka diperlukan bentuk umum untuk A^n berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^3 \\ (a+bi)^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^3 \\ (a+bi)^3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^4 & 0 \\ 0 & (a+bi)^4 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^4 & 0 \\ 0 & (a+bi)^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^5 \\ (a+bi)^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^5 \\ (a+bi)^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^6 & 0 \\ 0 & (a+bi)^6 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$A^7 = A^6 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^6 & 0 \\ 0 & (a+bi)^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^7 \\ (a+bi)^7 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$A^8 = A^7 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^7 \\ (a+bi)^7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^8 & 0 \\ 0 & (a+bi)^8 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$A^9 = A^8 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^8 & 0 \\ 0 & (a+bi)^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^9 \\ (a+bi)^9 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$A^{10} = A^9 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^9 \\ (a+bi)^9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^{10} & 0 \\ 0 & (a+bi)^{10} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$A^{11} = A^{10} \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^{10} & 0 \\ 0 & (a+bi)^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^{11} \\ (a+bi)^{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$A^{12} = A^{11} \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^{11} \\ (a+bi)^{11} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi)^{12} & 0 \\ 0 & (a+bi)^{12} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2.14) sampai Persamaan (2.25) maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.26}$$

3. Membuktikan bentuk umum A^ndengan menggunakan induksimatematika.

Bentuk umum dari A^n pada Persamaan (2.26) dinyatakan dalam Teorema 2.3 sebagai berikut:

Teorema 2.3: Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\, a, b \in R$ dan i = imajiner maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal $P(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil:

1) Untuk $n = 1$ maka:

$$P(1):\ A^1 = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^1 \\ (a+bi)^1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$P(k):\ A^k = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^k \\ (a+bi)^k & 0 \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$A^{k+2} = (A^k A^2)$$
$$= (A^k \cdot A \cdot A)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^k \\ (a+bi)^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^k \\ (a+bi)^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^k (a+bi)^2 \\ (a+bi)^k (a+bi)^2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^{k+2} \\ (a+bi)^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga terbukti $p(k + 2)$ benar.

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti $A^n = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

Misal $P(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix}$, untuk n genap, dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 2$ maka:

$P(2)$: $A^2 = \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix}$, benar

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$P(k):\ A^k = \begin{bmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a+bi)^k \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k+2$, $p(k+2)$ juga benar.

$$\begin{aligned}
A^{k+2} &= (A^k A^2) \\
&= (A^k \cdot A \cdot A) \\
&= \left(\begin{bmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a+bi)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi) \\ (a+bi) & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a+bi)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} (a+bi)^k (a+bi)^2 & 0 \\ 0 & (a+bi)^k (a+bi)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+bi)^{k+2} & 0 \\ 0 & (a+bi)^{k+2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti $p(k+2)$ benar.

Oleh karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti $A^n = \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix}$ untuk n genap.

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.3 terbukti.

4. Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap.

Bentuk umum *trace* matriks yang berbentuk khusus pada Persamaan dinyatakan dalam Teorema 2.4 sebagai berikut:

Teorema 2.4: Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\, a, b \in R$ dan i = imajiner maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.27}$$

Bukti

Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$, untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.3 maka didapat bentuk umum $tr(A^n)$, untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.28}$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 0$, untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = (-1)^{\frac{n}{2}} 2(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.3 maka didapat bentuk umum $tr(A^n)$, untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix}$$

$$= (a+bi)^n + (a+bi)^n = 2(a+bi)^n = 2(-(-(a+bi)^2))^{\frac{n}{2}}$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.11) diperoleh:

$$tr(A^n) = 2(-(\det(A))^{n/2} = 2(-1)^{n/2}(\det(A))^{n/2} \tag{2.29}$$

Maka terbukti $tr(A^n) = (-1)^{n/2} 2(\det(A))^{n/2}$ untuk n genap.

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.4 terbukti.

Berikut diberikan contoh yang berhubungan dengan Teorema 2.4 sebagai berikut:

Contoh 2.6 Diberikan matriks $\begin{bmatrix} 0 & 3-\frac{1}{2}i \\ 3-\frac{1}{2}i & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A^5)$ dan $tr(A^{10})$ dengan menggunakan Teorema 2.4.

Penyelesaian:

a. Berikut ini akan dicari $tr(A^5)$. Sehingga menurut Teorema 2.4 diperoleh:

$$tr(A^5) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^5 \\ (a+bi)^5 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{12}$ menggunakan Teorema 4.2 sebagai berikut:

$$det(A) = 0 - \left(3-\frac{1}{2}i\right)\left(3-\frac{1}{2}i\right) = -\left(9-\frac{6}{2}i-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{35}{4}-3i\right) = -\frac{35}{4}+3i$$

Untuk $(\det(A))^n$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{35}{4}\right)^2+(3)^2} = \sqrt{\frac{1225}{16}+9} = \sqrt{\frac{1369}{16}} = \frac{37}{4} = 9{,}25$$

$$\theta = arc\tan\frac{y}{x} = arc\tan\frac{3}{-\frac{35}{4}} = arc\tan 3\times-\frac{4}{35} = arc\tan-\frac{12}{35}$$

$$= -18{,}9246442° + 180° = 161{,}07535558°$$

Jika $n = 5$

Manurut Persaman (2.3) maka diperoleh:

$$(\det(A))^5 = \left(-\frac{35}{4}+3i\right)^5 = r^5[\cos(5\theta) + i\,sin(5\theta)]$$

$$= (9{,}25)^5[\cos(5\times 161{,}075355558°) + i\sin(5\times 161{,}07535558°)]$$

$$= 67.718,708007812[0,806029143 + 0,9967462918]$$
$$= 54.583,2522 + 67.498,3711i$$

Sehingga menurut Teorema 2.4 diperoleh:

$$tr(A^5) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^5 \\ (a+bi)^5 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Untuk $tr(A^{10})$ menurut Teorema 2.4 diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A^{10}) &= 2(-1)^{10/2}(\det(A))^{10/2} \\ &= -2(\det(A))^5 \\ &= -2(54.583,2522 + 67.498,3711i) \\ &= -109.166,5044 - 134.996,7422i \end{aligned}$$

2.8 Induksi Matematika

Definisi 2.8 (Munir, 2010) Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar unutk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Jika sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka telah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.7 Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ menggunakan induksi matematika?

Penyelesaian:

Andaikan bahwa $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa $n \geq 1$, jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, yaitu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Kebenaran proposisi ini harus dibuktikan dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

1. Basisi Induksi: Akan ditunjukkan untuk $n = 1$, maka $p(1)$ benar, yaitu:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

2. Langkah induksi: Asumsikan untuk $n = k$ maka $p(k)$ benar, yaitu:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad k \geq 1$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $n = (k+1)$, maka $p(k+1)$, juga benar, yaitu:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k^2 + 2k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k^2 + 2k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$= \frac{(2k+3)(k^2 + 3k + 2)}{6}$$

$$= \frac{(2k+3)(k+2)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+2)+(2k+3)}{6}$$

Karena langah (1) dan (2) telah terbukti benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.