BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Definisi Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 2004): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem Persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

sistem Persamaan (2.1) dari dibentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Selanjutnya Persamaan (2.2) dinotasikan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

Diperoleh sistem Persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ diferensial dari matriks $[dx_1 \;\; dx_2 \;\; \dots \;\; dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \quad (2.3)$$

Untuk memahami Persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ untuk $f_1 = 4x_1+10x_2$ dan $f_2 = 2x_1+5x_2$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 10x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1+10x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 5x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(x^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T \boldsymbol{y}. \quad (2.4)$$

Selanjutnya untuk memahami Persamaan (2.4), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T \boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & + & 3x_2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 \end{bmatrix} \\
&= y_1(x_1 + 3x_2) + y_2(2x_1 + 4x_2) \\
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\ (x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ (x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & + & 2y_2 \\ 3y_1 & + & 4y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= A^T \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

Jika matriks A adalah simetri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.5}$$

Untuk memahami Persamaan (2.5), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1(2x_1 + 4x_2) + x_2(4x_1 + 6x_2) \\
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 8x_2 \\ 8x_1 & + & 12x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2A\boldsymbol{x}$$

2.2 Kestabilan Sistem Diskrit

Berdasarkan **(Ogata, 2009)** akan diberikan definisi untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut:

Teorema 2.2 (Ogata, 2009) di berikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k, \tag{2.6}$$

dengan x_k adalah vektor *state* dan A adalah matriks nonsingular $n \times n$, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S_k simetri dan positif definit yang memenuhi:

$$A^T SA - S = -Q \tag{2.7}$$

Dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif. Dan dikatakan stabil jika terdapat matriks S simetri dan semidefinit positif yang memenuhi Persamaan (2.7), dengan matriks Q adalah matriks simetri dan semidefinit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Tentukan kestabilan dari Persamaan sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk menentukan kestabilan dari Persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut:

$$A^T SA - S = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} - s_{22} \\ -1.5s_{12} - s_{22} & 0.25s_{11} + s_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 Persamaan sebagai berikut:

$$s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} - s_{22} = 0$$

$$0.25s_{11} + s_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = 4$, $s_{12} = -2$, $s_{22} = 3$ dan dapat dibentuk menjadi:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matrik definit positif sebagai berikut:

$$\det\ (\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1.44 \text{ dan } \lambda_2 = 5.56$$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 1.44$, dan $\lambda_2 = 5.56$, karena $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif. Maka Persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

2.3 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab yang ketiga ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit.

2.3.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan Persamaan dinamik untuk masalah kendali optimal waktu diskrit sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{2.8}$$

dengan kondisi awal x_0, dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ dan $u_k \in \mathbb{R}^m$.

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J}_i = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{0}=\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.9}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan Persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun Persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton :
$$H^k = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.10}$$

Persamaan *state* :
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \tag{2.11}$$

Persamaan *kostate* :
$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x}_k}, \tag{2.12}$$

Kondisi *stasioner* :
$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \tag{2.13}$$

2.3.2 Masalah Kendali Optimal Waktu Diskrit Satu Kendali

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali satu kendali linier kuadratik, didefinisikan Persamaan linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \tag{2.14}$$

dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ dan $u_k \in \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut:

$$j = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k), \quad (2.15)$$

Pada Persamaan (2.15) diasumsikan $Q, R,$ dan S_N adalah matriks simetri semi definite positif.

Persamaan Hamilton : $H^k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R_k \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k),$ (2.16)

Kemudian Persamaan (2.15) menghasilkan persamaan *state*, *costate* dan kondisi *stasioner*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_k} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k,$ (2.17)

Persamaan *costate* : $\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = Q\boldsymbol{x}_k + A^T \lambda_{k+1},$ (2.18)

Kondisi stasioner : $0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R\boldsymbol{u}_k + B^T \lambda_{k+1},$ (2.19)

Menurut Persamaan (2.19) diperoleh:

$$\boldsymbol{u}_k = -R^{-1} B^T \lambda_{k+1}, \quad (2.20)$$

Kemudian Persamaan (2.20) subtitusikan ke Persamaan (2.17):

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1}B^T \lambda_{k+1}, \quad (2.21)$$

Selanjutnya menurut **(Ogata, 1995)**, di asumsikan berlaku untuk setiap k yaitu:

$$\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k, \quad (2.22)$$

Gunakan Persamaan (2.22) ke dalam (2.21) untuk mendapatkan Persamaan:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1}B^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \quad (2.23)$$

Pemecahan untuk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ menghasilkan:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I + BR^{-1}B^T S_{k+1})^{-1} A\boldsymbol{x}_k, \quad (2.24)$$

Substitusikan Persamaan (2.22) dengan Persamaan c*ostate* (2.18):

$$S_k\boldsymbol{x}_k = Q\boldsymbol{x}_k + A^T S_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.25}$$

Substitusikan Persamaan (2.24) dengan Persamaan (2.25):

$$S_k = A^T S_{k+1}(I + BR^{-1}B^T S_{k+1})^{-1} A + Q, \tag{2.26}$$

Gunakan invers matrik:

$$S_k = A^T[S_{k+1} - S_{k+1}B(B^T S_{k+1}B + R)^{-1} B^T S_{k+1}]A + Q, \tag{2.27}$$

Kemudian Persamaan (2.27) dapat dibentuk:

$$S_k = A^T(S_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T)^{-1} A + Q, \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) merupakan Persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi S_k kemudian dari Persamaan (2.18) dapat dibentuk Persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{k+1} = (A^T)^{-1}(\lambda_k - Q\boldsymbol{x}_k), \tag{2.29}$$

Berdasarkan Persamaan (2.22) maka Persamaan (2.29) menjadi:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= (A^T)^{-1}(S_k\boldsymbol{x}_k - Q\boldsymbol{x}_k) \\ &= (A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \tag{2.30}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.30) ke Persamaan (2.20) menjadi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_k &= -R^{-1}B^T\lambda_{k+1} \\ &= -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) dapat disederhanakan menjadi:

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k\boldsymbol{x}_{k,}$$

dimana:

$$K_k = -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k.$$

2.4 Representasi State untuk Sistem Waktu Diskrit

Menurut **(Ogata, 2009)** diberikan Persamaan karakteristik dinamik diskrit sebagai berikut:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_0 \boldsymbol{u}_k + b_1 \boldsymbol{u}_{k-1} + \cdots + b_n \boldsymbol{u}_{k-n} \tag{2.32}$$

dengan *u(k)* sebagai fungsi kendali input dan *y(k)* sebagai output dari sebuah sistem pada waktu k.

a_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan b_j untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kemudian didefinisikan transformasi *z* sebagai berikut:

$x_k = x(z)$ dan $x_{k-i} = z^{-i} x(z)$

Maka dengan menggunakan transformasi z Persamaan(2.32) menjadi:

$$y(z) + a_1 z^{-1} y(z) + \cdots + a_n z^{-n} y(z) = b_0 \boldsymbol{u}(z) + b_1 z^{-1} \boldsymbol{u}(z) + \cdots + b_n z^{-n} \boldsymbol{u}(z)$$

$$y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) = \boldsymbol{u}(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n})$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{2.33}$$

Menurut **(Ogata, 2009)** persamaan (2.33) merupakan Persamaan *pulse transfer.*

Persamaan (2.33) dapat direpresentasikan kebentuk kanonik teramati yaitu:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \\ \vdots \\ x_{n-1_{k+1}} \\ x_{n_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{n-1_k} \\ x_{n_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_k \tag{2.34}$$

dengan Persamaan output yaitu:

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{n-1_k} \\ x_{n_k} \end{bmatrix} + b_0 \boldsymbol{u}_k \qquad (2.35)$$

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.5:

Diberikan sebuah fungsi *pulse transfer*

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$$

Bentuklah Persamaan tersebut kebentuk kanonik teramati

Penyelesain:

Dari Fungsi pulse transfer dapat ditentukan

$$a_2 = 0.4 \; ; \; a_1 = 1.3 \; ; \; b_2 = 1 \; ; \; b_1 = 1 \; ; \; b_0 = 0$$

Berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh maka dapat dibentuk kanonik teramati sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix}$$