BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II ini membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun teori-teori pendukung tersebut antara lain tentang matriks, determinan matriks, metode perhitungan determinan untuk matriks bujur sangkar, sifat-sifat determinan untuk matriks bujur sangkar, determinan Radic, dan induksi matematika.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks disebut ukuran matriks. Martiks diberi nama dengan huruf besar seperti A, B, C dan lainnya. Entri-entri dari sebuah matriks disebut skalar. Entri-entri ini biasanya merupakan bilangan-bilangan real atau kompleks. Matriks yang mempunyai i baris dan j kolom ditulis $A = (a_{ij})$, artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut.

Secara umum bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Jika matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut matriks baris, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut dengan matriks kolom.

Selanjutnya jenis-jenis matriks yaitu:

a. Matriks bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks pada persamaan (2.1) mempunyai banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$.

b. Matriks tidak bujur sangkar

Matriks tidak bujur sangkar adalah matriks pada persamaan (2.1) mempunyai jumlah baris dan jumlah kolom yang tidak sama $(m \neq n)$.

c. Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks konstan yang semua elemen diagonal utamanya bernilai 1.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

d. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar elemen diagonal utama adalah nol dan elemen diagonal utama tidak nol.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

e. Matriks segitiga

Matriks segitiga adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah atau diatas garis diagonal utama nol.

1. Matriks segitiga bawah

Adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas diagonal utama nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2. Matriks segitiga atas

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utama nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya beberapa operasi pada matriks yaitu:

a. Penjumlahan dan pengurangan matriks

Definisi 2.2 (Heri Purwanto dkk., 2005) Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah dua buah matriks berukuran $m \times n$, maka jumlah/selisi kedua matriks tersebut, yaitu $A \pm B$ adalah matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran $m \times n$, dimana setiap elemen dari C adalah jumlah/selisih elemen-elemen yang berkorespondensi dari matriks A dan B. Dengan demikian, $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$.

Dari defenisi di atas lebih jelasnya perhatikan matriks berikut:

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

maka,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} & \cdots & a_{3n} - b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & a_{m3} - b_{m3} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

b. Perkalian matriks

1) Perkalian matriks dengan skalar

Definisi 2.3 (Kariadinata, 2013) Jika A adalah sebarang matriks dan k adalah sebarang skalar maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen A dengan k, yaitu:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \cdots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \cdots & ca_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{m3} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

2) Perkalian matriks dengan matriks

Definisi 2.4 (Kariadinata, 2013) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$.

Dari defenisi diatas lebih jelasnya perhatikan matriks berikut:

Diberikan

$$A_{m\times r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}, \qquad B_{r\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

maka

$$A \times B = C_{m\times n} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2}) & \cdots & (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2}) & \cdots & (a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & (a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mp}b_{p2}) & \cdots & (a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

3) Transpose matriks

Definisi 2.5 (Kariadinata, 2013) Jika A adalah sebarang matriks berukuran $m \times n$ maka transpose dari A dinyatakan oleh A^T dan didefenisikan dengan matriks $m \times n$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A dan seterusnya.

2.2 Determinan Matriks

Subbab ini akan membahas mengenai definisi dan teorema yang berhubungan dengan determinan matriks.

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Misalkan A adalah mariks bujur sangkar. ***Fungsi determinan*** *(determinant function)* dinotasikan dengan ***det*** dan kita mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut ***determinan dari A*** *(determinant of A).*

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar, antara lain metode ekspansi kofaktor, dan metode Sarrus.

a. Metode sarrus

Determinan matriks orde 2

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ maka } |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan matriks orde 3

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Contoh 2.1:

Diberikan $B = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ maka dengan menggunakan metode sarrus diperoleh

$$
\begin{aligned}
|B| &= [(3.3.2)+(4.4.1)+(5.2.2)]-[(5.3.1)+(3.4.2)+(4.2.2)] \\
&= (18+16+20)-(15+24+16) \\
&= 54-55=-1
\end{aligned}
$$

b. Ekspansi kofaktor

Ekspansi kofaktor adalah suatu metode yang digunakan untuk menghitung determinan dari suatu matriks. Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefenisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ik} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks dengan bentuk

$$
\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}
$$

dinamakan matriks kofaktor dari matriks A.

Kofaktor dan minor dari suatu elemen a_{ij} hanya berbeda dalam tandanya, dimana

$$
C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}
$$

Sebagai contoh, $C_{11} = M_{11}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = -M_{22}$ dan seterusnya. Maka untuk det A, dapat ditulis

$$|A| = a_{11}(M_{11}) + a_{12}(M_{12}) + a_{13}(M_{13})$$

Apabila diberikan matriks A yang berukuran $n \times n$, maka determinan matriks A dapat digunakan dengan menggunakan:

1. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom j :

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

2. Ekspansi kofaktor sepanjang baris i :

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Contoh 2.2:

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan $|A|$ menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama, maka

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$$

$$|A| = 0(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 + (-3)(-29) + (2)(39) = 165$$

Selanjutnya ada beberapa sifat-sifat determinan yaitu sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Gunawan Santosa, 2008) Apabila A adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka $\det(A^T) = \det(A)$.

Contoh 2.3:

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama pada A diperoleh:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$$

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus diperoleh:

$$\begin{aligned} |A| = \; & ([(3.5.5)+(7.3.3)+(4.-5.4)]-[(4.5.3)+(3.3.4)+(7.-5.5)])- \\ & 2([(4.5.5)+(6.3.3)+(3.-5.4)]-[(3.5.3)+(4.3.4)+(6.-5.5)])- \\ & 4([(4.7.5)+(6.4.3)+(3.3.4)]-[(3.7.3)+(4.4.4)+(6.3.5)])- \\ & 6([(4.7.3)+(6.4.-5)+(3.3.5)]-[(3.7.-5)+(4.4.5)+(6.3.3)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| = \; & [(75+63-80)-(60+36-175)]-2[(100+54-60)-(45+48-150)]- \\ & 4[(140+72+36)-(63+64+90)]-6[(84-120+45)-(-150+80+54)] \end{aligned}$$

$$|A| = 137-2(151)-4(31)-6(-20)$$

$$|A| = 137-302-124+120 = -169 \qquad (1)$$

Dan untuk $|A^T|$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama diperoleh:

$$|A^T| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus maka

$$\begin{aligned} |A^T| = \; & ([(3.5.5)+(-5.4.4)+(3.7.3)]-[(3.5.4)+(3.4.3)+(-5.7.5)])- \\ & 4([(2.5.5)+(-4.4.4)+(6.3.7)]-[(6.5.4)+(2.4.3)+(-4.7.5)])+ \\ & 6([(2.-5.5)+(-4.3.4)+(6.3.3)]-[(6.-5.4)+(2.3.3)+(-4.3.5)])- \\ & 3([(2.-5.4)+(-4.3.7)+(6.3.5)]-[(6.-5.7)+(2.3.5)+(-4.3.4)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A^T| = \; & [(75-80+63)-(60+36-175)]-4[(50-64+126)-(120+24-140)]+ \\ & 6[(-50-48+54)-(-120+18-60)]-3[(-40-84+90)-(-120+30-48)] \end{aligned}$$

$$|A^T| = (58+79)-4(112-4)+6(-44+162)-3(-34+228)$$

$$\left|A^T\right| = 137 - 4(108) + 6(118) - 3(194)$$

$$\left|A^T\right| = 137 - 432 + 708 - 582 = -169 \qquad (2)$$

Dari persamaan 1 dan 2 maka diperoleh $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema 2.2 (Purwanto dkk., 2005) diberikan matriks A, jika A mempunyai baris atau kolom yang semua elemennya nol, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 2.4:

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua diperoleh:

$$|A| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42}$$

$$|A| = 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0$$

Teorema 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$.

a. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka $\det(B) = k\det(A)$.
b. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.

Contoh 2.5 :

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ dan suatu skalar $k = 2$.

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama pada A maka

$$2|A| = 2\left(a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42}\right)$$

$$2|A| = 2\left(1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus maka

$$2|A| = 2\begin{pmatrix} \left(\left[(3.5.5)+(7.3.3)+(4.-5.4)\right]-\left[(4.5.3)+(3.3.4)+(7.-5.5)\right]\right)- \\ 2\left(\left[(4.5.5)+(6.3.3)+(3.-5.4)\right]-\left[(3.5.3)+(4.3.4)+(6.-5.5)\right]\right)- \\ 4\left(\left[(4.7.5)+(6.4.3)+(3.3.4)\right]-\left[(3.7.3)+(4.4.4)+(6.3.5)\right]\right)- \\ 6\left(\left[(4.7.3)+(6.4.-5)+(3.3.5)\right]-\left[(3.7.-5)+(4.4.5)+(6.3.3)\right]\right) \end{pmatrix}$$

$$2|A| = 2\begin{pmatrix} \left[(75+63-80)-(60+36-175)\right]-2\left[(100+54-60)-(45+48-150)\right]- \\ 4\left[(140+72+36)-(63+64+90)\right]-6\left[(84-120+45)-(-150+80+54)\right] \end{pmatrix}$$

$$2|A| = 2\left(137-2(151)-4(31)-6(-20)\right)$$

$$2|A| = 2\left(137-302-124+120\right) \qquad = 2(-169) = -338 \qquad (1)$$

Dan dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama pada B maka

$$|B| = b_{12}C_{12} + b_{22}C_{22} + b_{32}C_{32} + b_{42}C_{42}$$

$$|B| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus maka

$$\begin{aligned} |B| = \; & 2\left(\left[(3.5.5)+(7.3.3)+(4.-5.4)\right]-\left[(4.5.3)+(3.3.4)+(7.-5.5)\right]\right)- \\ & 2\left(\left[(8.5.5)+(12.3.3)+(6.-5.4)\right]-\left[(6.5.3)+(8.3.4)+(12.-5.5)\right]\right)- \\ & 4\left(\left[(8.7.5)+(12.4.3)+(6.3.4)\right]-\left[(6.7.3)+(8.4.4)+(12.3.5)\right]\right)- \\ & 6\left(\left[(8.7.3)+(12.4.-5)+(6.3.5)\right]-\left[(6.7.-5)+(8.4.5)+(12.3.3)\right]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| = \; & 2\left[(75+63-80)-(60+36-175)\right]-2\left[(200+108-120)-(90+96-300)\right]- \\ & 4\left[(280+144+72)-(126+128+180)\right]-6\left[(168-240+90)-(-210+160+108)\right] \end{aligned}$$

$$|B| = 2(58+79)-2(188+114)-4(496-434)-6(18-58)$$

$|B| = 2(137) - 2(302) - 4(62) - 6(-40)$

$|B| = 274 - 604 - 248 + 240 = -338$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh $2\det(A) = \det(B)$

Contoh 2.6:

Diberikan matriks B seperti pada contoh 2.5 dan telah diperoleh $|B| = -338$. Dan matriks C adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris kedua dengan baris pertama dari B, yaitu:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 12 & 6 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama maka

$|C| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42}$

$$|C| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 6 \\ -5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus maka

$$\begin{aligned} |C| = \; & 2\left(\left[(8.5.5) + (12.3.3) + (6.-5.4)\right] - \left[(6.5.3) + (8.3.4) + (12.-5.5)\right]\right) - \\ & 2\left(\left[(3.5.5) + (7.3.3) + (4.-5.4)\right] - \left[(4.5.3) + (3.3.4) + (7.-5.5)\right]\right) - \\ & 4\left(\left[(3.12.5) + (7.6.3) + (4.8.4)\right] - \left[(4.12.3) + (3.6.4) + (7.8.5)\right]\right) - \\ & 6\left(\left[(3.12.3) + (7.6.-5) + (4.8.5)\right] - \left[(4.12.-5) + (3.6.5) + (7.8.3)\right]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C| = \; & 2\left[(200 + 108 - 120) - (90 + 96 - 300)\right] - 2\left[(75 + 63 - 80) - (60 + 36 - 175)\right] - \\ & 4\left[(180 + 126 + 128) - (144 + 72 + 280)\right] - 6\left[(108 - 210 + 160) - (-240 + 90 + 168)\right] \end{aligned}$$

$|C| = 2(188 + 144) - 2(58 + 79) - 4(434 - 496) - 6(58 - 18)$

$|C| = 2(302) - 2(137) - 4(-62) - 6(40)$

$|C| = 604 - 274 + 248 - 240 = 338$ (3)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh $\det(B) = -\det(C)$.

Teorema 2.4 (Purwanto dkk., 2005) Jika A merupakan matriks segitiga (atas, bawah, ataupun diagonal), maka $\det(A)$ berupa hasil kali elemen-elemen diagonal utamanya, yaitu: $\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn}$

Contoh 2.7:

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 8 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ maka } \quad |A| = 2 \times 8 \times 5 \times 5 = 400$$

2.3 Determinan Radic

Definisi 2.7 (Radic, 2005) Jika A adalah matriks $m \times n$ dengan kolom $A_1, A_2, \cdots, A_n$ dan $m \le n$, maka determinan dari matriks A sebagai berikut:

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots j_{m \le n}} (-1)^{r+s} \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|$$

Dimana $\qquad r = 1 + 2 + 3 + \cdots + m$

$\qquad\qquad s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$

Contoh 2.8:

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi 2.7 maka $|A|$ diperoleh sebagai berikut:

$$|A| = (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+5)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3+4)+(1+3+4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(2+3+4+5)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor, maka

$$|A| = (-1)^{20} \times (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{20} \times (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{20} \times (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{20} \times (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode sarrus, maka

$$\begin{aligned} |A| = {} & \big([(3.5.9) + (6.3.7) + (7.2.3)] - [(7.5.7) + (3.3.3) + (6.2.9)]\big) - \\ & \big([(3.5.2) + (6.5.7) + (4.2.3)] - [(4.5.7) + (3.5.3) + (6.2.2)]\big) + \\ & \big([(3.3.2) + (7.5.7) + (4.2.9)] - [(4.3.7) + (3.5.9) + (7.2.2)]\big) - \\ & \big([(6.3.2) + (7.5.3) + (4.5.9)] - [(4.3.3) + (6.5.9) + (7.5.2)]\big) \end{aligned}$$

$$|A| = (303 - 380) - (264 - 209) + (335 - 247) - (321 - 376)$$

$$|A| = -77 - 55 + 88 + 55 = 11$$