BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Dibawah ini diberikan sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear.

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\\ &\vdots\\ \dot{\boldsymbol{x}}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan $E \subset R^n$, dan $\boldsymbol{f}: E \to R^n$ fungsi kontinu pada E

Sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ . \tag{2.2}$$

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$masing-masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$ maka sistem (2.2) disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathrm{a}_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_{23}\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_{2n}\mathrm{x}_n\\ &\vdots\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sistem (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dengan $\boldsymbol{x} \in E$ dan A matriks $n \times n$. Sistem (2.2) disebut juga sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.3).

2.2 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari sistem merupakan titik yang mana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panvilov, 2004). Secara matematis defenisi titik ekuilibrium dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Olsder, 2003) Titik $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ disebut titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) dari Sistem (2.2) jika $f(\boldsymbol{x}^*) = 0$.

Definisi 2.2 (Olsder, 2003) Titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ dari Sistem (2.2) dikatakan :

a) Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
b) Stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \delta_0$ maka berlaku $lim_{t \to \infty} x(t) = \boldsymbol{x}^*$.
c) Tidak stabil jika ekuilibrium $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ tak memenuhi (a).

Titik ekuilibrium terbagi menjadi 2 yaitu :

1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Populasi bebas penyakit artinya di dalam populasi tidak ada yang sakit, $I = 0$. Sehingga diperoleh I yang dinotasikan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = 0$.

2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Endemik Penyakit artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit, $I > 0$. Sehingga diperoleh I pada yang dinotasikan dengan I^*, yaitu $I^* > 0$.

2.3 Matriks Jacobian

Definisi 2.3 (Allen, 2007) diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.1) dengan $f_i \in C^1(E), i = 1,2, \dots, n$. Matriks

$$J\big(f(\boldsymbol{x}^*)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix}$$

$J(f(\boldsymbol{x}^*))$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\boldsymbol{x}^*$.

Definisi 2.4 (Anton, 1998) Jika A adalah matriks $n\ x\ n$, maka vektor tak nol x didalam R^n disebut vektor eigen dari A, jika untuk skalar λ, yang disebut nilai eigen A diperoleh $Ax = \lambda x$.

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada Sistem (2.2) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik $\boldsymbol{x}^*$. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada Sistem (2.2) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1 (Hale, 1991) jika semua nilai eigen matriks jacobian mempunyai bagian real negatif, maka ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dari Sistem (2.2) stabil asimtotik lokal.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan bagian real negatif eigen matriks, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 (Allen, 2007)Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ untuk $n = 2$, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_1 > 0, a_2 > 0$. Untuk $n = 3$,kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_3 > 0$, $a_1 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekulibrium $\boldsymbol{x}^*$ stabil asimtotik lokal.

2.4 Pemodelan Matematika

Penerapan model matematika dan teknik matematika untuk mendalami masalah *biosciences* dipelajari dalam *mathematical biosciences*. Salah satu cabang *mathematical biosciences* adala *mathematical epidemiology,* yang mempelajari tentang penyebaran dan pengendalian penyakit. Mempelajari model epidemi yang didalamnya termasuk penyakit penyebab kematian pada suatu populasi total yang berubah merupakan hal penting dalam *mathematical epidemiology*.

Epidemiology merupakan suatu cabang ilmu yang mempelajari bagaimana terjadi epidemic dalam suatu populasi makhluk hidup. Dengan menggunakan pemodelan matematika yang didasarkan pada asumsi-asumsi tertentu, diharapkan dari model yang disusun dapat menjelaskan fenomena dan mengambil tindakan apa yang harus dilakukan jika terjadi epidemi. Ada berbagai model matematika epidemi yang dikenal berdasarkan sifat penyakitnya. Misalnya S, E, I, dan R berturut-turut menunjukan *Susceptible* (kelas populasi yang rentan), *Exposed* (kelas populasi yang laten), *Infectious* (kelas populasi yang terinfeksi), dan *Recovered* (kelas populasi yang sembuh).

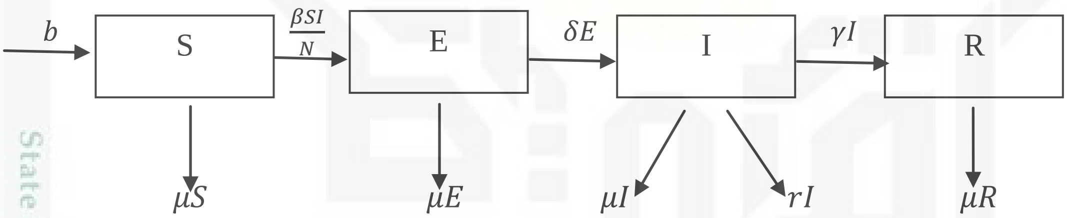
Dengan berbagai asumsi, dikenal berbagai model epidemi, diantaranya SIR, SIRS, SEIR, SEIRS dan SEIS. Dalam model SIR, individu yang sembuh mempunyai kekebalan sehingga tidak lagi menjadi rentan, sedangkan untuk model SIRS, individu yang sudah sembuh tidak memiliki kekebalan terhadap penyakit tersebut sehingga dapat menjadi rentan lagi. Dalam model SEIR, SEIRS dan SEIS, individu yang rentan melalui masa laten setelah terinfeksi sebelum menjadi penyakit.

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 (Chasnov, 2009). Dalam modelnya, Kermack-McKendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat, dan *Recovered* (R) yang menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit. Beberapa penyakit seperti campak, AIDS, TBC, polio mempunyai periode laten, artinya ada selang waktu suatu individu terinfeksi sampai munculnya suatu penyakit. Periode laten ini akan terdapat pada kelas *Exsposed* (E), artinya individu yang terdeteksi atau terjangkit virus. Penambahan kelas pada penyakit polio ini akan membentuk model SEIR.

Dibawah ini merupakan contoh model SEIR yang dibahas oleh Aminah Ekawati (2011) dalam jurnal *Kestabilan Model SEIR*. Adapun Asumsi yang digunakan dalam jurnal tersebut adalah sebagai berikut :

1. Populasi konstan.
2. Penyakit tidak Fatal.
3. Individu yang lahir masuk kedalam kelas *Susceptible (S).*
4. Individu yang telah sembuh masuk kedalam kelas *Recovered (R).*
5. Laju kelahiran sama dengan laju kematian alami.

Berdasarkan asumsi di atas, dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.1 Model SEIR Tanpa Vaksinasi dan Migrasi

Sistem persamaan differensial berdasarkan Gambar (2.1) sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \qquad (2.1.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu E - \delta E \qquad (2.1.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \mu I - rI - \gamma I \qquad (2.1.c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \qquad (2.1.d)$$

dengan

μ : laju kematian alami.

β : laju kontak.

b : laju kelahiran.

P : proporsi keberhasilan vaksinansi.

δ : laju infeksi pada kelas E (*Exposed*).

γ : laju kesembuhan pada kelas I (*Infected*).

N : jumlah total populasi.

2.5 Tahap Pemodelan

Tahapan mencari solusi permasalahan kehidupan sehari-hari maupun pada ilmu-ilmu lain dengan menggunakan bantuan matematika diberikan sebagai berikut.

1. Pemodelan matematika untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari diawali dengan mengenali masalah tersebut terlebih dahulu yaitu melalui beberapa langkah yaitu identifikasi masalah, lambang, satuan dan variabel atau konstanta serta menentukan besaran yang terlibat, selain itu dalam proses penterjemahan masalah selalu terdapat hukum yang mengendalikan.
2. Menentukan variabel atau konstanta yang penting dan merinci keterkaitan antara variabel atau konstanta tersebut sehingga dapat disusun model matematika. Model matematika yang terbentuk harus bebas satuan.
3. Dengan memanfaatkan teori-teori dalam matematika dapat diperoleh solusi model.
4. Dengan menginterpretasikan solusi model ditentukan solusi masalah. Pada proses ini satuan muncul kembali (Nagle & Staff, (1993)).