BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persaman linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

dari sistem Persamaan (2.1) dibentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Selanjutnya Persamaan (2.2) dinotasikan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix},$$

Diperoleh sistem persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \quad dx_2 \quad \ldots \quad dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \tag{2.3}$$

Untuk memahami Persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1 :

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ untuk $f_1 = 4x_1{+}5x_2$ dan $f_2 = 2x_1{+}6x_2$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1{+}5x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1{+}5x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 6x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 6x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku hubungan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}. \tag{2.4}$$

Selanjutnya juga berlaku hubungan :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.5}$$

Selanjutnya untuk memahami Persamaan (2.5), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2 :

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \\
&= y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(3x_1 + 4x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 + 4y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= A^T\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

Jika matriks A adalah simetri dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \qquad (2.6)$$

Untuk memahami Persamaan (2.6), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1(2x_1 + 4x_2) + x_2(4x_1 + 6x_2) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 6{x_2}^2\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 8x_2 \\ 8x_1 & + & 12x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 4x_2 \\ 4x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

2.2 Bentuk Kuadratik

Bagian ini akan dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks juga sifat definit positif maupun sifat definit negatif oleh Lewis (1995). Diberikan bentuk umum persamaan kuadratik sebagai berikut :

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2, \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk persamaan kuadratik dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Bentuk kuadratik di atas dapat diubah ke bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}, \qquad (2.8)$$

untuk $i \le j,\ j \le n$ dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$ dengan $\in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan matriks A adalah matriks yang simetri. Selanjutnya untuk memahami bentuk di atas, maka diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.4 :

Jabarkan notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_i x_j$$

Penyelesaian :

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_i x_1 + c_{i2}x_i x_2\}$$

$$= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2$$

$$= c_{11}{x_1}^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}{x_2}^2$$

$$= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} & x_1c_{12} + x_2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif ataukah definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh Lewis (1995) yaitu jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Matriks A definit positif jika semua $\lambda_i > 0$
2. Matriks A semi definit positif jika semua $\lambda_i > 0$, $\exists\ \lambda_j = 0$
3. Matriks A definit negatif jika semua $\lambda_i < 0$
4. Matriks A semi definit negatif jika semua $\lambda_i < 0$, $\exists\ \lambda_j = 0$.

jika matriks A tidak memenuhi keempat syarat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite*.

Contoh 2.5 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, akan ditentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian :

Untuk menentukan sifat definit dari matriks A dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut :

$$\det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 6 & 0 \\ 0 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 8) - 0 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 8) = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1 = 6 \text{ dan } \lambda_2 = 8$$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 6,$ dan $\lambda_2 = 8$, karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif.

2.3 Kestabilan Sistem Diskrit

Sebelum kita membahas tentang kestabilan, kita bahas terlebih dahulu tentang titik ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}\,(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Selanjutnya berdasarkan (Ogata, 1995) akan diberikan definisi untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut :

Teorema 2.1 (Ogata, 1995) diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k,$$

Dengan x_k adalah vektor *state* dan A adalah matriks non singular $n \times n$, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S simetri dan definit positif yang memenuhi :

$$A^T SA - S = -Q$$

Dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.6 :

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem waktu diskrit berikut :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut :

$$A^T SA - S = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} - s_{22} \\ -1.5s_{12} - s_{22} & 0.25s_{11} + s_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut :

$$s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} - s_{22} = 0$$

$$0.25s_{11} + s_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = 4$, $s_{12} = -2$, $s_{22} = 3$ dan dapat dibentuk menjadi :

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matriks definit positif sebagai berikut :

$$\det\ (\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 8 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1.44 \text{ dan } \lambda_2 = 5.56$$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 1.44$, dan $\lambda_2 = 5.56$, karena $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

2.4 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit, kemudian dilanjutkan membahas tentang kendali linier kuadratik dengan umpan balik loop tertutup.

2.4.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu diskrit sistem dinamis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n \tag{2.9}$$

dengan kondisi awal x_0, dengan x_k adalah vektor berukuran n dan kontrol input u_k adalah vektor berukuran *m.*

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{J}_i = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.10}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan adalah sebagai berikut :

Persamaan Hamilton : $$H^k = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.11}$$

Persamaan *state* : $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.12}$$

Persamaan *costate* : $$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.13}$$

Kondisi stasioner : $$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \qquad k = i, \dots, N-1, \tag{2.14}$$

2.4.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit Lingkar Tertutup

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik dari masalah kendali lingkar tertutup didefinisikan persamaan linier untuk waktu diskrit sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k, \tag{2.15}$$

Dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^m$ dan meminimalkan fungsi objektif yaitu :

$$J_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k), \tag{2.16}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif . Kendali awal *state* diberikan sebagian x_i. Asumsikan $Q, R,$ dan S_N adalah matriks simetri semi definite positif.

Persamaan Hamilton : $H^k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k^T Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k),$ (2.17)

Kemudian Persamaan (2.15) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k,$ (2.18)

Persamaan *costate* : $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = Q\boldsymbol{x}_k + A^T \lambda_{k+1},$ (2.19)

Kondisi stasioner : $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R\boldsymbol{u}_k + B^T \lambda_{k+1},$ (2.20)

Menurut Persamaan (2.20) diperoleh :

$$\boldsymbol{u}_k = -R^{-1} B^T \lambda_{k+1}, \tag{2.21}$$

Kemudian Persamaan (2.21) subtitusikan ke Persamaan (2.18) :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1}B^T \lambda_{k+1}, \tag{2.22}$$

Selanjutnya diasumsikan :

$$\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.23}$$

$$\lambda_{k+1} = S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}$$

Subsitusikan Persamaan (2.23) ke dalam (2.22) untuk mendapatkan persamaan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k - BR^{-1}B^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.24}$$

Pemecahan untuk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ menghasilkan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} + BR^{-1}B^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1}\,(I + BR^{-1}B^T S_{k+1}) = A\boldsymbol{x}_k$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I + BR^{-1}B^T S_{k+1})^{-1} A\boldsymbol{x}_k, \tag{2.25}$$

Substitusikan Persamaan (2.23) ke Persamaan c*ostate* (2.19) :

$$S_k \boldsymbol{x}_k = Q\boldsymbol{x}_k + A^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.26}$$

Substitusikan Persamaan (2.25) ke Persamaan (2.26) :

$$S_k = A^T S_{k+1}\left(I + BR^{-1}B^T S_{k+1}\right)^{-1} A + Q, \quad (2.27)$$

Gunakan invers matriks :

$$S_k = A^T [S_{k+1} - S_{k+1}B\left(B^T S_{k+1} B + R\right)^{-1} B^T S_{k+1}]A + Q, \quad (2.28)$$

Kemudian Persamaan (2.28) dapat dibentuk :

$$S_k = A^T \left(S_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T\right)^{-1} A + Q, \quad (2.29)$$

Persamaan (2.29) merupakan persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi S_k kemudian dari Persamaan (2.19) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut :

$$\lambda_{k+1} = (A^T)^{-1}(\lambda_k - Q\boldsymbol{x}_k), \quad (2.30)$$

Berdasarkan Persamaan (2.23) maka Persamaan (2.30) menjadi :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= (A^T)^{-1}(S_k\boldsymbol{x}_k - Q\boldsymbol{x}_k) \\ &= (A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \quad (2.31)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.31) ke Persamaan (2.21) menjadi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_k &= -R^{-1}B^T\lambda_{k+1} \\ &= -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(S_k - Q)\boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) dapat disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k\boldsymbol{x}_{k,}$$

dimana :

$$K_k = -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(S_k - Q).$$

2.5 Bentuk Diskon

Pada bagian ini akan diberikan bentuk persamaan sistem dinamik dengan pemberian faktor diskon. Persamaan (2.15) diberikan faktor diskon. Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Gaitsgory dkk (2016) faktor diskon tersebut, menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta^{k+1}}(A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k) \tag{2.33}$$

Kemudian dapat didefinisikan persamaan:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta^{k+1}}\boldsymbol{x}_{k+1} = \sqrt{\beta^k}\sqrt{\beta}\ \boldsymbol{x}_{k+1}$$

Dan juga $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \sqrt{\beta^k}\boldsymbol{x}_k$ dan $\widehat{\boldsymbol{u}}_k = \sqrt{\beta^k}\boldsymbol{u}_k$, sehingga Persamaan (2.33) menjadi:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta^{k+1}}(A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k)$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta^k}\sqrt{\beta}(A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{u}_k)$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta}A\sqrt{\beta^k}\boldsymbol{x}_k + \sqrt{\beta}B\sqrt{\beta^k}\boldsymbol{u}_k$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta}A\widehat{\boldsymbol{x}}_k + \sqrt{\beta}B\widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{2.34}$$

maka diperoleh fungsi dinamik dengan faktor diskon (2.34) dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\hat{x}_k \epsilon\ \mathbb{R}^n$, dan fungsi kendali $\hat{u}_k \in \mathbb{R}^n$. Selanjutnya fungsi tujuan setelah pemberian faktor diskon diperoleh sebagai berikut :

$$J_i = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k(\boldsymbol{x}_k^T Q\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R\boldsymbol{u}_k) \tag{2.35}$$

Selanjutnya fungsi tujuannya menjadi sebagai berikut :

$$J_i = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\boldsymbol{x}}_k^T Q\widehat{\boldsymbol{x}}_k + \widehat{\boldsymbol{u}}_k^T R\widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{2.36}$$