BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Menurut **Howard Anton (1987)** matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem persaman linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Dari sistem persamaan (2.1) dibentuk matriks yaitu:

$$
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.2}
$$

Selanjutnya persamaan (2.2) dinotasikan:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan } a_{ij} \in R,\ x = A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dan } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix}
$$

Diperoleh sistem persamaan liniernya adalah $f(x) = Ax$ dengan $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ diferensial dari matriks $[dx_1 dx_2 \ \ldots \ dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A. \qquad (2.3)$$

Untuk memahami Persamaan (2.3), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ untuk $f_1 = 6x_1 + 14x_2$ dan $f_2 = 3x_1 + 7x_2$.

Penyelesaian:

Berdasarkan Persamaan (2.3) maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(6x_1 + 14x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(6x_1 + 14x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1 + 7x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1 + 7x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 y_2 \ \dots \ y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T \boldsymbol{y}. \qquad (2.4)$$

Selanjutnya untuk memahami Persamaan (2.4), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T \boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Dicari $\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) &= [y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\
&= [y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix}3x_1 & + & 5x_2\\ 4x_1 & + & 6x_2\end{bmatrix}\\
&= y_1(3x_1+5x_2)+y_2(4x_1+6x_2)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Persamaan (2.4), maka:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(3x_1y_1+5x_2y_1+4x_1y_2+6x_2y_2) &= \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1y_1+5x_2y_1+4x_1y_2+6x_2y_2)\\ \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_1y_1+5x_2y_1+4x_1y_2+6x_2y_2)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}3y_1 & + & 5y_2\\ 4y_1 & + & 6y_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\\
&= A^T\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

Jika matriks A adalah simetri dan $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, maka berlaku:

$$
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.5}
$$

Untuk memahami Persamaan (2.6), maka diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$ dengan $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

Dicari $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}) &= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\
&= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}x_1 & + & 3x_2\\ 3x_1 & + & 5x_2\end{bmatrix}\\
&= x_1(x_1+3x_2)+x_2(3x_1+5x_2)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Persamaan (2.5) maka:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left({x_1}^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left({x_1}^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left({x_1}^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_1}}\left({x_1}^2 + 6x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_2}}\left({x_1}^2 + 6x_1x_2 + 5{x_2}^2\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 6x_2 \\ 6x_1 & + & 10x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} x_1 & + & 3x_2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2A\boldsymbol{x}$$

2.2 Bentuk Kuadratik

Menurut **Ogata(1995)**, diberikan bentuk umum persamaan kuadratik sebagai berikut:

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2, \tag{2.6}$$

Bentuk kuadratik di atas dapat diubah ke bentuk sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut bentuk persamaan kuadratik dengan n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ untuk $i \leq j,\ \ j \leq n$ dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan matriks A adalah matriks yang simetri. Selanjutnya untuk memahami bentuk di atas, maka diberikan contoh.

Contoh 2.4:

Jabarkan notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j$$

Penyelesaian:

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2\}$$

$$= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2$$

$$= c_{11}{x_1}^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}{x_2}^2$$

$$= (x_1c_{11} + x_2c_{21})x_1 + (x_1c_{12} + x_2c_{22})x_2$$

$$= [x_1c_{11} + x_2c_{21} \quad x_1c_{12} + x_2c_{22}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif atau definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A. Hal ini sebagaimana dijelaskan oleh **Lewis (1995)** yaitu jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_{1.}, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi:

1. Definit positif jika nilai eigen $\lambda_i > 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Semi definit positif jika semua nilai eigen $\lambda_i \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan paling tidak salah satu darinya nol.
3. Definit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$
4. Semi definit negatif jika semua nilai eigen $\lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan paling tidak salah satu darinya nol.

jika nilai eigen λ_i tidak memenuhi keempat syarat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut *undefinite*.

Contoh 2.5:

Diberikan bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukanlah sifat definitnya.

Penyelesaian:

Untuk menentukan sifat definit, dicari nilai eigen dari matriks A dengan langkah-langkah berikut:

$$\det\ (\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -1 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 6) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = -8 \ \text{ dan } \ \lambda_2 = -2$$

karena $\lambda_i < 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan bentuk kuadratik memiliki sifat definit negatif.

2.3 Kestabilan Sistem Diskrit

Pada bagian ini akan diberikan Teorema untuk kasus kestabilan waktu diskrit sebagai berikut:

Teorema 2.2 (Ogata, 1995) diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{2.8}$$

Dengan $x(k)$ adalah vektor *state* dan A adalah matriks non singular nxn, untuk titik ekuilibrium $\bar{x}(k) = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks $S(k)$ simetri dan positif definit yang memenuhi:

$$A^T S(k) A - S(k) = -Q, \tag{2.9}$$

Dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh.

Contoh 2.9:

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut:

$$A^T S(k) A - S(k) = -Q,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4s_{22} - s_{11} & -3s_{12} - 4s_{22} \\ -3s_{12} - 4s_{22} & s_{11} + 4s_{12} + 3s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut:

$$4s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-3s_{12} - 4s_{22} = 0$$

$$s_{11} + 4s_{12} + 3s_{22} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = 5,\ s_{12} = 2,\ s_{22} = -\frac{3}{2}$ dan dapat dibentuk menjadi:

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matrik definit positif sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 5)\left(\lambda + \frac{3}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda - \frac{23}{2} = 0$$

$$2\lambda^2 - 7\lambda - 23 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya adalah:

$\lambda_1 = 2.64$ dan $\lambda_2 = 0.86$

Dari matriks diatas didapat: $\lambda_1 = 2.64,$ dan$\lambda_2 = 0.86,$ karena $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan matriks diatas adalah matriks definit positif. Maka persamaan pada contoh ini stabil asimtotik.

2.4 Matrik Jordan

Suatu matriks Jordan J berukuran $n \times n$ adalah bentuk matriks Jordan jika berisi blok-blok Jordan, ditempatkan sepanjang diagonal, dengan entri-entri lainnya adalah nol.

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

Dengan $J_1(\lambda_1), \ldots, J_k(\lambda_k)$ adalah matriks blok Jordan.

Selanjutnya Matriks blok Jordan $J_k(\lambda)$ adalah matriks segitiga atas $k \times k$ dengan bentuk:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

nilai eigen λ muncul n kali pada diagonal utama, angka 1 muncul $n - 1$ kali pada superdiagonal (diatas diagonal utama) sedangkan entri-entri lainnya nol.

Contoh 2.8:

Tentukan banyak blok Jordan dari matriks Jordan sebagai berikut:

$$J = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Penyelesaian:

Matriks J merupakan matriks Jordan yang terdiri dari tiga matriks blok Jordan, yaitu $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, dan $J_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dengan ukuran matriks J yaitu $(6x6)$.

2.5 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab yang ketiga ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit.

2.5.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu diskrit sistem dinamis sebagai berikut:

$$x(k+1) = \boldsymbol{f}^k(x(k), u(k)),$$

Dengan kondisi awal $x(0)$ dengan $x(k)$ adalah vektor berukuran n dan kontrol input $u(k)$ adalah vektor berukuran *m.*

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J_i = \phi(N, x(x)) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k (x(k), u(k)) \tag{2.10}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton : $H(k) = L^k\big(x(k), u(k)\big) + \alpha^T(k+1)\boldsymbol{f}^k\big(x(k), u(k)\big)$ (2.11)

Persamaan *state* : $(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \alpha(k+1)}, \quad k = i, \dots, N-1$ (2.12)

Persamaan *costate* : $-\alpha(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \boldsymbol{x(k)}}, \quad k = i, \dots, N-1$ (2.13)

Persamaan *stationer* : $0 = \frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}, \quad k = i, \dots, N-1$ (2.14)

2.5.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit Lingkar Tertutup

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik, didefinisikan persamaan linier sebagai berikut:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{2.15}$$

Dengan $x(k) \epsilon\, \mathbb{R}^n$ dan $u(k) \epsilon\, \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)S(N)x(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} L^k (x^T(k)Q(k)) + u^T(k)Ru(k)) \tag{2.16}$$

Pada Persamaan (2.16) diasumsikan $Q, R,$ dan $S(N)$ adalah matriks simetri semi definite positif dan $R_k \neq 0$ untuk semua k.

Selanjutnya dengan Persamaan dinamik (2.15) dan fungsi tujuan (2.16) dibentuk persamaan Hamilton sebagai berikut.

$$H(k) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\right) + \alpha^T(k+1)(Ax(k) + Bu(k)) \qquad (2.17)$$

Kemudian Persamaan (2.17) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*.

Persamaan *state* : $x(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \alpha(k+1)} = Ax(k) + Bu(k) \qquad (2.18)$

Persamaan *costate* : $\alpha(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = Qx(k) + A^T\alpha(k+1) \qquad (2.19)$

Kondisi satsioner : $0 = \frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = Ru(k) + B^T\alpha(k+1) \qquad (2.20)$

Menurut Persamaan (2.20) diperoleh:

$$u(k) = -R^{-1}B^T\alpha(k+1), \qquad (2.21)$$

Kemudian Persamaan (2.21) subtitusikan ke Persamaan (2.18):

$$x(k+1) = Ax(k) - BR^{-1}B^T\alpha(k+1) \qquad (2.22)$$

Selanjutnya menurut Ogata (1995) diasumsikan untuk setiap k berlaku:

$$\alpha(k) = S(k)x(k) \qquad (2.23)$$

Gunakan Persamaan (2.23) kedalam Persamaan (2.22) untuk mendapatkan persamaan:

$$x(k+1) = Ax(k) - BR^{-1}B^T S(k+1)x(k+1) \qquad (2.24)$$

Pemecahan untuk $x(k+1)$ menghasilkan:

$$x(k+1) = (I + BR^{-1}B^T S(k+1)^{-1}Ax(k) \qquad (2.26)$$

Substitusikan Persamaan (2.23) ke Persamaan c*ostate* (2.19):

$$S(k)x(k) = Qx(k) + A^T S(k+1)x(k+1) \qquad (2.27)$$

Substitusikan Persamaan (2.26) ke Persamaan (2.27):

$$S(k) = A^T S(k+1)\left(I + BR^{-1}B^T S(k+1)\right)^{-1} A + Q \qquad (2.28)$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi $S(k)$ kemudian dari Persamaan (2.19) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$\alpha(k+1) = (A^T)^{-1}(\alpha(k) - Qx(k)) \qquad (2.29)$$

Berdasarkan Persamaan (2.23) maka Persamaan (2.29) menjadi:

$$\begin{aligned} \alpha(k+1) &= (A^T)^{-1}(S(k)x(k) - Qx(k)) \\ &= (A^T)^{-1}(S(k) - Q)x(k) \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (2.30) ke Persamaan (2.21) menjadi:

$$\begin{aligned} u(k) &= -R^{-1}(k)B^T\lambda(k+1) \\ &= -R^{-1}(k)B^T(A^T)^{-1}(S(k) - Q)x(k) \end{aligned} \qquad (2.31)$$

2.6 Representasi State untuk Sistem Waktu Diskrit

Menurut **Ogata (1995)** diberikan persamaan karakteristik dinamik diskrit sebagai berikut:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \qquad (2.32)$$

Dengan *u(k)* sebagai input dan *y(k)* sebagai output dari sebuah sistem pada k.

a_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan b_j untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kemudian didefinisikan transformasi *z* sebagai berikut:

$$x(k) = x(z) \text{ dan } x(k-i) = z^{-i}x(z)$$

Maka Persamaan (2.32) menjadi:

$$y(z) + a_1 z^{-1} y(z) + \cdots + a_n z^{-n} y(z) = b_0 u(z) + b_1 z^{-1} u(z) + \cdots + b_n z^{-n} u(z)$$

$$y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) = u(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n})$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{2.33}$$

Menurut Ogata (1995) Persamaan (2.33) merupakan persamaan *pulse transfer*.

Persamaan (2.33) dapat direpresentasikan ke bentuk kanonik jordan yaitu:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{2.34}$$

Contoh 2.7:

Diberikan sebuah fungsi *pulse transfer* sebagai berikut:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2}{(z-3)^3} + \frac{-3}{(z-3)^2} + \frac{-1}{(z-3)} + \frac{4}{(z-2)}$$

Bentuklah persamaan tersebut kebentuk kanonik Jordan.

Penyelesain :

Bentuk kanonik Jordannya adalah:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$