Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987) Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen atau entri dalam matriks. Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (horizontal) dan kolom (vertikal) yang dimilikinya. Jenis-jenis matriks yang digunakan dalam proposal ini yaitu:

2.1.1 Matriks Nilpoten

Definisi 2.2 (Perko, 1991) Sebuah matriks berukuran $n \times n$ dikatakan nilpoten berorder k maka $N^k = 0$.

Contoh 2.1:

Diberikan sebuah matriks $N = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 12 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$, buktikan bahwa matriks N merupakan matriks nilpoten dan tentukan ordernya.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa N adalah matrik nilpoten, maka akan dicari terlebih dahulu martik N dengan order 3 sebagai berikut:

$$N^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 12 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 12 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 12 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Didapat $N^3 = 0$ maka N adalah matrik nilpoten beroder 3.

2.1.2 Matriks Singular

Definisi 2.3 (Ruminta, 2009) Matriks singular (*singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.2:

Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan apakah matriks A singular atau tidak?

Penyelesaian:

Diketahui Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \times 2 \times 0) + (5 \times 2 \times 0) + (4 \times 3 \times 0) - (5 \times 3 \times 0) - (1 \times 2 \times 0) - (4 \times 2 \times 0)$$

$$= 0$$

Didapat determinan dari matriks A adalah 0 maka matriks A adalah matriks singular.

2.1.3 Matriks Nonsingular

Definisi 2.4 (Ruminta, 2009) Matriks nonsingular (*non singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.3:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan determinan matriks A ?

Penyelesaian:

Diketahui Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$= (1 \times 2 \times 0) + (2 \times 1 \times 3) + (3 \times (-4) \times (-2)) - (2 \times (-4) \times 0) - (1 \times 1 \times (-2)) - (3 \times 2 \times 3)$$
$$= 46$$

Didapat determinan dari matriks *A* tidak nol, maka matriks *A* adalah matriks nonsingular.

2.2 Bentuk Kuadratik

Bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yang bersifat definit positif maupun definit negatif. Bentuk kuadratik yaitu $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j dengan

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2.$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j, \qquad (2.1)$$

Persamaan di atas disebut bentuk kuadratik dengan *n* banyak variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \epsilon \mathbb{R}$. Sifat definit positif dan definit negatif dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, dapat juga diperoleh , dengan menganalisa nilai eigen dari matriks A. Menurut (Lewis, 1995) Jika *A* matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\forall\ \lambda_i > 0$, *i*=1,2…n.
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\forall\ \lambda_i \geq 0$, *i*=1,2…n.
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\forall\ \lambda_i < 0$, *i*=1,2…n.
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\forall\ \lambda_i \leq 0$, *i*=1,2…n.
5. Indefinit jika dan hanya jika $\forall\ \ \lambda_i > 0\ \ dan\ \ \lambda_i < 0$, *i*=1,2…n

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4:

Bentuklah notasi sigma $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -3x_ix_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks *A*.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Penyelesaian:

Notasi sigma tersebut dapat diuraikan dengan langkah berikut:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -3x_i x_j = \sum_{i=1}^{2}\{-3x_i x_1 - 3x_i x_2\}$$
$$= -3x_1x_1 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 - 3x_2x_2$$
$$= -3{x_1}^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 - 3{x_2}^2$$
$$= [-3x_1 - 3x_2]x_1 + [-3x_1 - 3x_2]x_2$$
$$= [-3x_1 - 3x_2 \; -3x_1 - 3x_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$
$$= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}-3 & -3\\-3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan apakah bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan definit positif ataukah definit negatif, dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen dari matriks A.

Dari matriks $A = \begin{bmatrix}-3 & -3\\-3 & -3\end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$
$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & -3\\-3 & -3\end{bmatrix}\right) = 0$$
$$[(\lambda + 3)(\lambda + 3) - 9] = 0$$
$$\lambda^2 + 6\lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas memiliki sifat semi definit negatif.

Contoh 2.5:

Tentukanlah sifat definit dari bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$
$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}\right) = 0$$
$$[(\lambda - 3)(\lambda - 3) - 9] = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda = 0$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$$

dari nilai eigen di atas didapat : $\lambda_1 = 0$, dan $\lambda_2 = 6$, karena $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,2$ maka dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas adalah memiliki sifat semi definit positif.

2.3 Kestabilan Sistem Diskrit

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu diberikan definisi tentang titik ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.5 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik ekuilibrium diatas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Ogata, 1995) diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k,$$

Dengan $\boldsymbol{x}_k$ adalah vektor *state* dan A adalah matriks nonsingular $n\ x\ n$, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}_k = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika terdapat matriks S_k simetri dan positif definit yang memenuhi :

$$A_k^T S_k A_k - S_k = -Q_k,$$

Dengan matriks Q adalah matriks simetri dan definit positif.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.6 :

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Untuk menentukan kestabilan dari persamaan sistem di atas, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut :

$$A_k^T S_k A_k - S_k = -Q_k,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4s_{22} - s_{11} & -3_{12} - 4s_{22} \\ -3s_{12} - 4s_{22} & s_{11} + 4s_{12} + 3s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut :

$$4s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-3s_{12} - 4s_{22} = 0$$

$$s_{11} + 4s_{12} + 3s_{22} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = \frac{37}{13}$, $s_{12} = \frac{8}{13}$, $s_{22} = \frac{-6}{13}$ dan dapat dibentuk matrik S yaitu :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{37}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k$$

Kemudian dibuktikan matriks S adalah matrik definit positif sebagai berikut :

$$\det\ (\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{37}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{37}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{8}{13} & \lambda + \frac{6}{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{37}{13}\right)\left(\lambda + \frac{6}{13}\right) - \frac{64}{169} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{31}{13}\lambda - \frac{286}{169} = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$\lambda_1 = 2.95$ dan $\lambda_2 = -0.57$

dari matriks di atas didapat : $\lambda_1 = 2.95$, dan $\lambda_2 = -0.57$, karena $\lambda_1 > 0$, matriks $\lambda_2 < -0.57$, maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks indefinit, maka persamaan dinamik pada contoh ini tidak stabil.

2.4 Kendali Optimal Waktu Diskrit

Selanjutnya pada subbab yang ketiga ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu diskrit, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu diskrit, kemudian dilanjutkan membahas tentang kendali linier kuadratik dengan umpan balik loop tertutup.

2.4.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu diskrit sistem dinamis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \tag{2.2}$$

dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}_0$ dengan $\boldsymbol{x}_k$ adalah vektor berukuran n dan kontrol input $\boldsymbol{u}_k$ adalah vektor berukuran *m*.

Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{J}_i = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{k=i}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.3}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun persamaan itu adalah sebagai berikut :

Persamaan Hamilton : $$H = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2.4}$$

Persamaan *state* : $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{k+1}}, \quad k = i, \dots, N-1, \tag{2.5}$$

Persamaan *kostate* : $$-\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \quad k = i, \dots, N-1, \tag{2.6}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Kondisi *stasioner* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \quad k = i, \dots, N-1,$ (2.7)

2.4.2 Kendali Optimal Waktu Diskrit Lingkar Tertutup

Berikutnya bagian ini dibahas masalah kendali lingkar tertutup linier kuadratik, didefinisikan persamaan linier sebagai berikut :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k, \quad (2.8)$$

dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ dan $u_k \in \mathbb{R}^m$, fungsi tujuan yang terkait adalah fungsi kuadratik sebagai berikut :

$$J_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^T S_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R_k \boldsymbol{u}_k), \quad (2.9)$$

Perhatikan bahwa kedua kendali dan matriks dapat diperumum menjadi waktu yang bervariasi. Kendali awal *state* diberikan sebagian x_i. Asumsikan Q_k, R_k, dan S_N adalah matriks simetri semidefinite positif dan $|R_k| \neq 0$ untuk semua k.

Persamaan Hamilton : $H^k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T R_k \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k)$ (2.10)

Kemudian Persmaan (2.8) menghasilkan persamaan *state* dan *costate*

Persamaan *state* : $\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{u}_k,$ (2.11)

Persamaan *costate* : $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{x}_k} = Q_k \boldsymbol{x}_k + A_k^T \lambda_{k+1},$ (2.12)

Kondisi satsioner : $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{u}_k} = R_k \boldsymbol{u}_k + B_k^T \lambda_{k+1},$ (2.13)

Menurut Persamaan (2.13) diperoleh :

$$\boldsymbol{u}_k = -R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}, \quad (2.14)$$

Kemudian Persamaan (2.14) subtitusikan ke Persamaan (2.11) :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k - B_k R_k^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}, \quad (2.15)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Selanjutnya diasumsikan :

$$\lambda_k = S_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.16}$$

Subsitusi Persamaan (2.16) ke dalam (2.15) untuk mendapatkan persamaan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k \boldsymbol{x}_k - B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.17}$$

Pemecahan untuk $\boldsymbol{x}_{k+1}$ menghasilkan :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I + B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1})^{-1} A_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.18}$$

Substitusikan Persamaan (2.16) dengan Persamaan c*ostate* (2.12) :

$$S_k \boldsymbol{x}_k = Q_k \boldsymbol{x}_k + A_k^T S_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1}, \tag{2.19}$$

Substitusikan Persamaan (2.18) dengan Persamaan (2.19) :

$$S_k = A_k^T S_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^T S_{k+1})^{-1} A_k + Q_k, \tag{2.20}$$

Gunakan inversi matrik :

$$S_k = A_k^T [S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^T S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^T S_{k+1}] A_k + Q_k, \tag{2.21}$$

Kemudian Persamaan (2.21) dapat dibentuk :

$$S_k = A_k^T (S_{k+1}^{-1} + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k + Q_k, \tag{2.22}$$

Persamaan (2.22) merupakan persamaan Riccati. Persamaan Riccati tersebut akan dicari solusi S_k kemudian dari Persamaan (2.12) dapat dibentuk persamaan sebagai berikut :

$$\lambda_{k+1} = (A_k^T)^{-1} (\lambda_k - Q_k \boldsymbol{x}_k), \tag{2.23}$$

Berdasarkan Persamaan (2.16) maka Persamaan (2.23) menjadi :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= (A_k^T)^{-1} (S_k \boldsymbol{x}_k - Q_k \boldsymbol{x}_k) \\ &= (A_k^T)^{-1} (S_k - Q_k) \boldsymbol{x}_k, \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Kemudian substitusikan Persamaan (2.24) ke Persamaan (2.14) menjadi :

$$\boldsymbol{u}_k = -R_k^{-1}B_k^T\lambda_{k+1}$$

$$= -R_k^{-1}B_k^T(A_k^T)^{-1}(S_k - Q_k)\boldsymbol{x}_k, \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k\boldsymbol{x}_k,$$

dimana :

$$K_k = -R_k^{-1}B_k^T(A_k^T)^{-1}(S_k - Q_k)\boldsymbol{x}_k.$$

2.5 Kendali Optimal Waktu Diskrit Dengan Sistem Deskriptor

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal waktu diskrit dengan sistem deskriptor untuk kendali lingkar tertutup. Didefinisikan Persamaan dinamik dengan deskriptor sebagai berikut:

$$E\boldsymbol{x}_{k+1} = A_k\boldsymbol{x}_k + B_k\ \boldsymbol{u}_k \quad , x(0) = x_0 \quad (2.26)$$

Dengan $E, A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}, Rank(E) = n, B \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali yang diberikan pada Persamaan (2.26). Fungsi tujuan yaitu:

$$J = x_k^T Q\boldsymbol{x_k} + \sum_{t_0}^{T_f}\left[\left[x_k^T Q\boldsymbol{x_k} \quad \boldsymbol{u_k^T} R\boldsymbol{u}_k\right]\right] \quad (2.27)$$

Persamaan (2.26) dapat dirubah kebentuk umum menjadi persamaan kendali lingkar tertutup linier kuadratik dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 2.1 (Gantmacher,1959) Jika Persamaan deskriptor (2.26) berbentuk umum maka terdapat dua matrik nonsingular X dan Y sedemikian sehingga $Y^TEX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ dan $Y^TAX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ dengan A_1 adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai eigen dari A, I_n dan I_r adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.

Berdasarkan teorema (2.1), maka terlebih dahulu didefinisikan $x_k = X_1\, x_{1_k} + X_2\, x_{2_k}$ (2,28)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dengan $X = [X_1\ X_2]$, $Y = [Y_1^T\ Y_2^T]$, selanjutnya Persamaan (2.26) menjadi seperti berikut:

$$Y^T E x_{k+1} = Y^T A_k \boldsymbol{x_k} + Y^T B_K \boldsymbol{u_k} \tag{2.29}$$

Berdasarkan Persamaan (2.28) maka Persamaan (2.29) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + Y^T B_k \boldsymbol{u_k} \tag{2.30}$$

Selanjutnya berdasarkan jurnal Muhammad Wakhid Mustapa (2014) diketahui bahwa indeks dari sistem deskriptor (2.26) dinyatakan dengan derajat kenilpotenan k dari matriks *N*. Berdasarkan jurnal tersebut diketahui bahwa sistem berindeks satu maka Persamaan (2.30) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + Y^T B_k \boldsymbol{u_k} \tag{2.31}$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (2.28) diperoleh $\begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} \coloneqq X^{-1} x_k$ sehingga,

$$\begin{bmatrix} x_{1_k}(0) \\ x_{2_k}(0) \end{bmatrix} = X^{-1} x_{k_0} \tag{2.32}$$

Berdasarkan Persamaan (2.31) dan (2.32) maka dapat disusun persamaan dinamik yaitu:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + Y^T B_k \boldsymbol{u_k} \quad , \begin{bmatrix} x_{1_k}(0) \\ x_{2_k}(0) \end{bmatrix} = X^{-1} x_{k_0} \tag{2.33}$$

Persamaan (2.33) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$x_{1_{k+1}} = A_k x_k + Y_1 B_k \boldsymbol{u_k}\ ,\ \ x_k(0) = [I_n \quad 0] X^{-1} x_0 \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} x_{2_{k+1}} &= -[0 \quad I_n] Y_2 B_k \boldsymbol{u_k} \\ &= -Y_2 B_k \boldsymbol{u_k} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Berdasarkan Persamaan (2.28) dan Persamaan (2.33) fungsi tujuan (2.27) dapat ditulis sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$J = x_k^T Q \boldsymbol{x_k} + \sum_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_{k_1}^T & x_{k_2}^T \end{bmatrix} X^T Q X \begin{bmatrix} x_k \\ x_k \end{bmatrix} + u_k^T R \boldsymbol{u_k} \right]$$

$$J = x_k^T Q + \sum_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_{k_1}^T & (-Y_2 B_k \boldsymbol{u_k})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} Q [X_1 \; X_2] \begin{bmatrix} x_k \\ -Y_2 B_k \boldsymbol{u_k} \end{bmatrix} + u_k^T R \boldsymbol{u_k} \right]$$

$$J = x_k^T Q \boldsymbol{x_k} + \sum_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_{k_1}^T & \boldsymbol{u_k^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T Q X_1 & -X_1^T Q X_2 Y_2 B \\ - X_2^T Y_2^T B^T Q X_1 & X_2^T Y_2^T B^T Q X_2 Y_2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \boldsymbol{u_k} \end{bmatrix} + u_k^T R \boldsymbol{u_k} \right]$$

$$J = x_k^T Q \boldsymbol{x_k} + \sum_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_{k_1}^T & \boldsymbol{u_k^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \boldsymbol{u_k} \end{bmatrix} + u_k^T R \boldsymbol{u_k} \right] \quad (2.36)$$

Berdasarkan Persamaan (2.34) dan Persamaan (2.36) maka dibentuk fungsi Hamilton yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} x_k^T & \boldsymbol{u_k^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \boldsymbol{u_k} \end{bmatrix} + \omega_1^T (A_k x_k + Y_1 B_k \boldsymbol{u_k})$$

$$H = \left[x_k^T Q x_k + \boldsymbol{u_k^T} V^T x_k + x_k^T V \boldsymbol{u_k} + \boldsymbol{u_k^T} R \boldsymbol{u_k} \right] + \lambda_1^T (A_k x_k + Y_1 B_k \boldsymbol{u_k}) \quad (2.37)$$

Dari Persamaan (2.37) maka diperoleh:

Persamaan *state* yaitu : $x_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{k+1}} = A_k \, x_k + Y_1 \, B_k \boldsymbol{u_k}$ (2.38)

Persamaan *costate* yaitu: $\lambda_k = \frac{\partial H}{\partial x_k} = (2Q x_k + 2V \boldsymbol{u_k} + A_k^T \lambda \;)$ (2.39)

Persamaan stasioner yaitu: $0 = \frac{\partial H}{\partial u_k} = 2V^T x_k + 2R \boldsymbol{u_k} + B_k^T Y_1^T \lambda$ (2.40)

Berdasarkan Persamaan (2.40) diperoleh

$$\mathbf{u_k} = -R^{-1} V^T x_k - {}^1/_2 \, B_k^T Y_1^T \lambda \quad (2.41)$$

Selanjutnya, fungsi kendali pada Persamaan (2.41) disubsitusikan ke persamaan dinamik diskrit pada Persamaan (2.26) kemudian di analisa kestabilannya.