BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Pengertian Nilai Tukar Uang

Menurut Fatihatur Ramadhani, dkk. (2017), uang memegang peranan penting dalam perekonomian setiap negara. Aktifitas ekonomi yang dapat dilakukan suatu negara dengan menggunakan uang adalah perdagangan, baik skala nasional maupun internasional seperti ekspor dan impor. Namun untuk melakukan kegiatan tersebut, suatu negara harus memiliki mata uang yang sesuai dengan negara yang ditujunya sehingga diperlukan kegiatan menukar uang. Tingkat harga yang disepakati kedua negara untuk nilai tukar uang tersebut dinamakan kurs atau *exchange rate*.

Nilai tukar rupiah menurut Adiningsih, dkk. (1998), nilai tukar rupiah adalah harga rupiah terhadap mata uang negara lain, dengan kata lain nilai tukar rupiah merupakan nilai dari satu mata rupiah yang ditranslasikan ke dalam mata uang negara lain.

Nilai tukar mata uang menggambarkan kuatnya perekonomian suatu negara. Jika perekonomian suatu negara mengalami jatuhnya harga nilai mata uangnya terhadap mata uang asing, maka bisa dikatakan bahwa perekonomian negara tersebut dinilai melemah dan buruk (Fonny A Jacob, 1998).

2.2 Distribusi Peluang

Peluang dapat dipandang sebagai cara untuk menggambarkan suatu ukuran ketidakpastian atau ketidakyakinan suatu peristiwa terjadi atau tidak terjadi. Untuk menyatakan suatu ketidakpastian atau kepastian diperlukan pemodelan matematis yang secara teori disebut dengan distribusi.

Dalam statistik dikenal dua macam distribusi peluang yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu. Pada dasarnya distribusi peluang yang menggunakan variabel acak diskrit adalah distribusi yang objeknya dapat dihitung dengan jelas, sedangkan untuk distribusi peluang yang menggunakan vairabel acak kontinu objeknya tidak jelas atau tak hingga (Wibisono, 2005).

2.2.1 Distribusi Peluang Diskrit

Peubah acak yang nilainya berupa bilangan cacah, dapat dihitung dan tidak terhingga disebut peubah acak diskrit. Distribusi peluang yang berhubungan dengan peubah acak diskrit disebut distribusi peluang diskrit (Wibisono, 2005).

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1995: 54) Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang atau distribusi peluang dengan peubah acak diskrit X untuk setiap kemungkinan hasil x:

1 $f(x) \geq 0$

2 $\sum_x f(x) = 1$ (2.1)

3 $P(X = x) = f(x)$

2.2.2 Distribusi Peluang Kontinu

Distribusi probabilitas bagi peubah acak kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel, akan tetapi distribusinya dapat dinyatakan dalam persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinu dan digambarkan dalam bentuk kurva (Wibisono,2005).

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1995: 60) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan rill $\mathbb{R}$, bila:

1 $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (2.2)

3 $P(X = x) = f(x)$

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu akan dinyatakan sebagai fungsi distribusi. Nilai fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu biasanya berupa konstanta dan fungsi.

Definisi 2.6 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x(x) = p(X) \leq x$ untuk seluruh x yang rill. Jika X adalah kontinu, maka:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \tag{2.3}$$

2.3 Ekspektasi dan Variansi

Ekpektasi atau sering disebut nilai harapan yang biasanya dilambangkan dengan $E(X)$ atau μ adalah nilai yang mewakili sifat tengah atau posisi pusat dari kumpulan nilai data. Konsep ekspektasi dalam statistik sangat besar manfaatnya. Selain digunakan untuk pengembangan dalam statistika lanjutan dan terapan dibidang lain, juga sebagai konsep dasar untuk mendefinisikan atau membangun ukuran-ukuran dalam statistik, seperti rerata, varian, koesfisien, korelasi (Maman Suherman).

Meskipun ekspektasi dari variabel acak X adalah suatu nilai yang penting dalam statistik, karena nilai tersebut menggambarkan dimana distribusi peluang itu berpusat, tetapi nilai ekpektasi tidak cukup untuk memberikan gambaran tentang bentuk suatu distribusi. Untuk mengetahui bentuk suatu distribusi, perlu diketahui variabilitas distribusi tersebut (Walpole, 1995). Salah satu ukuran variabilitas dalam statistik adalah variansi. Variansi dari variabel acak X atau variansi dari distribusi probabilitas X dinyatakan dengan $Var(X)$ atau dinotasikan dengan $\sigma_x{}^2$ atau σ^2.

2.3.1 Ekspektasi Distribusi Peluang

Nilai ekspektasi dari sebuah peubah acak juga disebut dengan rataan populasi. Nilai rata-rata dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_x atau μ. Ekspektasi peubah acak X, dinyatakan dengan $E(X)$ sesuai dengan definisi tentang ekspektasi peluang.

Definisi 2.3 (Walpole & Myers, 1995: 94) Diberikan X suatu variabel acak dengan distribusi peluang $f(x)$, maka nilai ekspektasi atau rataan X adalah:

$$E(x) = \mu = \sum_{x} x\,f(x) \tag{2.4}$$

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi kepadatan peluang dari peubah acak X. untuk mendapatkan nilai ekspektasi dari peubah acak X yang kontinu dapat diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (2.4) berdasarkan definisi tentang fungsi kepadatan peluang.

Definisi 2.4 (Dudewich & Mishra,1995: 246) Jika X adalah suatu peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari x, maka nilai ekspektasi dari peubah acak X adalah:

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx \tag{2.5}$$

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai yang diuraikan $x_1, x_{2,} \dots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang padanan nya $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acak kontinu, definisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (Walpole & Myers, 1989).

2.3.2 Variansi Distribusi Peluang

Variansi merupakan ukuran penyebaran yang mengukur seberapa besar data menyebar dari nilai tengahnya. Semakin kecil sebaran data maka semakin baik. Ini juga menunjukkan adanya kehomogenan yang lebih tinggi dan perbedaaan antara data yang ada tidak terlalu tinggi. Variansi distribusi peluang X dinyatakan dengan $Var(X)$ atau ${\sigma_x}^2$ atau σ^2.

Definisi 2.5 (Dudewicz & Misra,1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi adalah:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x} (X-\mu)^2\,f(x), \qquad \text{bila } X \text{ diskrit} \tag{2.6}$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2\, f(x)dx \quad \text{, bila } X \text{ kontinu} \tag{2.7}$$

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra, 1988) Variansi dari peubah acak adalah:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{2.8}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \end{aligned}$$

Karena $\mu = E(X)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - 2\,E(X)\,E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X^2) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

2.4 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah salah satu keluarga distribusi probabilitas kontinu yang berasal dari fungsi gamma. Distribusi Gamma hanya digunakan jika jumlah kejadian yang berhasil berupa integer. Distribusi Gamma mempunyai fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & Untuk\ yang\ lainnya \end{cases} \tag{2.9}$$

dimana :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

Kuantitas $\Gamma(\alpha)$dikenal dengan fungsi gamma. Integral secara langsung akan menghasilkan bahwa $\Gamma(1) = 1$. Dan secara terus-menerus integral dengan $\alpha > 1$ akan menghasilkan rumus berulang $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, dan juga $\Gamma(n) = (n-1)!$ yang dihasilkan jika n adalah bilangan bulat. Hal di atas dapat ditunjukkan seperti berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

$$= [-x^{\alpha-1}e^{-x}] + \int_0^{\infty} (\alpha-1)\,x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx$$

$$= (\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

$$= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi densitas peluang distribusi gamma akan ditunjukkan memenuhi sifat distribusi peluang kontinu, seperti berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}dx$$

misal $y = \frac{x}{\theta}$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\theta y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\theta\,dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

Dalam kasus tertentu ketika α adalah bilangan bulat, distribusi fungsi dari variabel acak yang didistribusikan secara gamma dapat digambarkan sebagai jumlah dari peluang poisson tertentu. Jika α tidak bilangan bulat dan $0 < c < d < \infty$, tidak memungkinkan untuk memberikan gambaran yang tepat untuk:

$$\int_c^d \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}dx$$

Teorema 2.1 Jika X mempunyai distribusi gamma dengan parameter α dan β, maka:

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \text{ dan } \sigma^2 = V(X) = \alpha\beta^2$$

Bukti:

Seperti yang diketahui bahwa:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]dx$$

Dari sifat yang telah dibuktikan sebelumnya diketahui bahwa:

$$\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = 1$$

Karena itu,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} = \beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)$$

Sehingga,

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x/\beta}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}[\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)] = \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta$$

Selanjutnya untuk menentukan variansi distribusi gamma, tentukan terlebih dahulu nilai harapan berikut:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right]dx = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x/\beta}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}[\beta^{\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)] = \frac{\beta^2\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\beta^2$$

Sehingga variansi distribusi gamma dapat ditentukan sebagai:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$$

2.5 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi. Karakteristik dari distribusi Weibull yaitu dicirikan oleh dua parameter yaitu γ dan λ, dimana $\gamma > 0$ dan $\lambda > 0$ (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x,\gamma,\lambda) = \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} \tag{2.10}$$

Dengan x adalah variable random, γ adalah parameter skala dan λ adalah parameter bentuk. Parameter γ dan λ adalah parameter yang akan di estimasi. Fungsi densitas Weibull memiliki nilai ekspektasi dan variansi secara berurutan adalah:

$$\gamma\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ dan } \frac{1}{\lambda^2} = \left[\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2\right] \tag{2.11}$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah:

$$f(x,\gamma,\lambda) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} \tag{2.12}$$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ untuk distribusi Weibull dua parameter sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}}\, dx$$

misalkan:

$$u = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda-1} dx$$

$$dx = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

maka diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda-1} e^{-u} \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{x}\right)^{\lambda-1} du = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}\ du = 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Weibull pada persamaan (2.12) dan persamaan (2.10), sebagai berikut:

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} dx$$

misalkan,

$$u = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}$$

$$du = \lambda\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\gamma} dx$$

$$du = \frac{\lambda}{\gamma}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda-1} dx$$

$$dx = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{x}\right)^{\lambda-1} du$$

sehingga,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda-1} e^{-u} \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{\gamma}{x}\right)^{\lambda-1} dx \\ &= \int_{0}^{x} e^{-u}\, dx \\ &= [-e^{-u}]_{0}^{x} \\ &= \left[-e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}}\right]_{0}^{x} \\ &= -e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} - \left(-e^{-\left(\frac{0}{\gamma}\right)^{\lambda}}\right) \\ &= -e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} + 1 \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Weibull dua parameter. Rata-rata atau $E(X)$ dari distribusi Weibull adalah:

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, \frac{\lambda}{\gamma^\lambda} x^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\gamma^\lambda} x^{\lambda} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\lambda}\, dx$$

misalkan:

$k = \gamma^\lambda$

$z = x^\lambda$

$z^{\frac{1}{\lambda}} = x$

$dx = \dfrac{1}{\lambda} z^{\frac{1}{\lambda}-1}\, dz$

Sehingga,

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{k} z e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} \frac{1}{\lambda} z^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{k}\, e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} z^{\frac{1}{\lambda}}\, dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{k}\, e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} z^{\frac{1}{\lambda}}\, \frac{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}\, dz$$

$$= \frac{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}{k} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} z^{\frac{1}{\lambda}}}{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}\, dz$$

dengan,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} z^{\frac{1}{\lambda}}}{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}\, dz = 1$$

sehingga,

$$E(X) = \frac{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}{k} \cdot 1 = \frac{k^{\frac{1}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)}{k}$$

dengan $k = \gamma^{\lambda}$, maka:

$$E(X) = k^{\frac{1}{\lambda}}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)$$

$$= \gamma\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Weibull, yaitu sebagai berikut:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Terlebih dahulu ditentukan:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\gamma^{\lambda}} x^{\lambda+1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\lambda}} dx$$

misalkan:

$k = \gamma^{\lambda}$

$z = x^{\lambda}$

$z^{\frac{1}{\lambda}} = x$

$dx = \frac{1}{\lambda} z^{\frac{1}{\lambda}-1}\, dz$

maka diperoleh:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda z\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right)}{k} e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} \cdot \frac{1}{\lambda} z^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{2}{\lambda}}}{k} e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} dz$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{2}{\lambda}}}{k} e^{-\left(\frac{z}{k}\right)} \frac{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)} dz$$

$$= \frac{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}{k}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{2}{\lambda}}\, e^{-\left(\frac{z}{k}\right)}}{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}\,dz$$

dengan,

$$\int_0^\infty \frac{z^{\frac{2}{\lambda}}\, e^{-\left(\frac{z}{k}\right)}}{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}\,dz = 1$$

sehingga,

$$E(X^2) = \frac{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}{k}\cdot 1$$

$$= \frac{k^{\frac{2}{\lambda}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}{k}$$

dengan $k = \gamma^\lambda$, maka:

$$E(X^2) = k^{\frac{2}{\lambda}}\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)$$

$$= \gamma^2\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)$$

sehingga,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \gamma^2\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) - \left[\gamma\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\right]^2$$

$$= \gamma^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\lambda}+1\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2\right]$$

2.6 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan abad 19 (Gompertz-Verhulst).

Distribusi eksponensial adalah distribusi yang paling penting dan paling sederhana. Distribusi eksponensial secara terus menerus telah memegang peranan dalam kajian waktu hidup yang disamakan dengan distribusi normal pada kajian statistik lainnya. Distribusi eksponensial memiliki fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x_i}{\theta}} \tag{2.13}$$

dengan fungsi kumuatifnya,

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\theta}} \tag{2.14}$$

nilai ekspektasi dan varians secara berurutan,

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \tag{2.15}$$

$$V(X) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \tag{2.16}$$

Berikut akan ditunjukkan bahwa fungsi densitas sama dengan 1

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)dx = 1 \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x_i}{\theta}} dx \\
&= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{\frac{-x_i}{\theta}} dx \\
&= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{\frac{-u}{\theta}} du \\
&= \int_0^\infty e^{-u} du \\
&= -e^{-u}\Big]_0^\infty \\
&= -e^{-\frac{x}{\theta}}\Big]_0^\infty \\
&= -e^{-\frac{\infty}{\theta}} - \left(-e^{-\frac{0}{\theta}}\right) \\
&= 0 - (-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.7 Estimasi Parameter

Estimasi adalah suatu proses statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga atau estimasinya (Yitnosumarto 1990).

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan estimasi parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthy, 2006).

2.7.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama dari acak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n : \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta; X)$ maka:

$$L(\theta; X) = f(X; \theta) \tag{2.17}$$

Karena $f(x_1, x_2, \ldots, x_n : \theta)$ adalah FKP bersama dari variabel acak yang saling bebas, sehingga:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n : \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) \tag{2.18}$$

Selanjutnya persamaan (2.18) disubsitusikan ke persamaan (2.17) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\theta; X) &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Contoh 2.1 Misalkan *X* memiliki FKP sebagai berikut:

$$f(x; \theta) = \theta X^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$$

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari distribusi tersebut, tentukanlah fungsi *likelihood* dari θ.

Penyelesaian:

Untuk menentukan fungsi *likelihood* digunakan persamaan (2.15) sehingga diperoleh fungsi *likelihood*nya adalah:

$$\begin{aligned} L(\theta;X) &= f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot \ldots \cdot f(x_n;\theta) \\ &= \theta {X_1}^{\theta-1}\cdot \theta {X_2}^{\theta-1}\cdot \ldots \cdot \theta {X_n}^{\theta-1} \\ &= \theta^n \prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\theta-1} \end{aligned}$$

2.7.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi maksimum likelihood (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\hat{\theta}$ sebagai estimator titik untuk θ yang memaksimumkan $L(\theta;X)$. Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f(X;\theta)$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta;X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta;X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta;X) = l(\theta;X)$, dimana $l(\hat{\theta};X) \geq l(\theta;X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta;X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$ (Lee & Wang, 2003).

Contoh 2.2 Dari contoh (2.1) diketahui fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\theta;X) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\theta-1}$$

Dari fungsi tersebut, tentukanlah estimator dari $\hat{\theta}$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan estimator dari $\hat{\theta}$, maka kita harus menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood* atau $\ln L(\theta;X) = l(\theta;X)$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
l(\theta; X) &= \ln \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \\
&= \ln \theta^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}\right) \\
&= \ln \theta^n + \ln X_1^{\theta-1} + \ln X_2^{\theta-1} + \cdots + \ln X_n^{\theta-1} \\
&= n \ln \theta + \theta - 1 \ln X_1 + \theta - 1 \ln X_2 + \cdots + \theta - 1 \ln X_n \\
&= n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \\
&= n \ln \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i
\end{aligned}
$$

karena,

$$\frac{dl(\theta; X)}{d\theta} = 0$$

sehingga,

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i &= 0 \\
\frac{n}{\theta} &= -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \\
\theta &= -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}
\end{aligned}
$$

Maka estimator maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta} = \theta$, dimana $\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

2.7.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Newton-Raphson adalah suatu proses iterasi yang dilakukan dengan metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari pemecahan persamaan tidak linier. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang berulang-ulang dimana setiap penggulangan disebut iterasi. Jika hampiran tidak menghasilkan suatu pemecahan yang sangat dekat dengan pemecahan persamaan yang tidak linier tersebut maka iterasi telah mengalami proses konvergen.

Metode Newton-Raphson dapat diperluas untuk variabel banyak, misal ingin mendapatkan pemecahan untuk $x_1, x_2, \dots, x_p$ sedemikian sehingga :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$
$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

Kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_1}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk ke dalam sebuah matriks yang disebut matriks Jacobian, yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

kemudian dicari invers dari persamaan (2.20), yaitu :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

selanjutnya misalkan ${x_1}^k, {x_2}^k, \dots, {x_p}^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke k, dan misalkan ${f_1}^k, {f_2}^k, \dots, {f_p}^k$ adalah nilai yang berhubungan dengan fungsi $f_1, f_2, \dots, f_p$, yaitu:

$${f_1}^k = f_1({x_1}^k, {x_2}^k, \dots, {x_p}^k)$$
$${f_2}^k = f_2({x_1}^k, {x_2}^k, \dots, {x_p}^k)$$
$$\vdots$$
$${f_p}^k = f_p({x_1}^k, {x_2}^k, \dots, {x_p}^k)$$

dan misalkan ${b_{ij}}^k$ adalah elemen dari J^{-1} yang dihasilkan pada ${x_1}^k, {x_2}^k, \dots, {x_p}^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1{}^{k+1} &= x_1{}^k - \left(b_{11}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{1p}{}^k f_p{}^k\right) \\ x_2{}^{k+1} &= x_2{}^k - \left(b_{21}{}^k f_1{}^k + b_{22}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{2p}{}^k f_p{}^k\right) \\ &\vdots \\ x_p{}^{k+1} &= x_p{}^k - \left(b_{p1}{}^k f_1{}^k + b_{p2}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{pp}{}^k f_p{}^k\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Proses iterasi dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal pada variabel banyak tersebut. Nilai awal dapat dicari dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linier sederhana. Iterasi dapat dihentikan jika dari iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (John Wenyu Wang, 2001).

2.8 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Uji kebaikan dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai untuk data pertukaran nilai mata uang Ringgit ke Rupiah dari Tahun 2001-2017 Masehi dan Tahun 1421-1438 Hijriah. Pada penelitian ini akan digunakan uji kebaikan, yaitu uji *Akaike's Information Criterion* (AIC) dan *Bayesian Information Criterion* (BIC), dengan terlebih dahulu menentukan ln *likelihood* nya seperti persamaan (4.2), (4.8) dan persamaan (4.14) sehingga nilai AIC dan BIC dapat ditentukan dengan menggunakan rumus yaitu:

$$AIC = -2l + 2p \tag{2.23}$$

$$BIC = -2l + p\ln(n) \tag{2.24}$$

dengan,

$p =$ jumlah parameter.

Dalam pengukuran *Akaike's Information Criterion* (AIC), jika nilai $AIC_A < AIC_B < AIC_c$, maka distribusi A lebih sesuai untuk data pertukaran nilai mata uang Ringgit ke Rupiah. Begitu juga dengan *Bayesian Information Criterion* (BIC), jika nilai $BIC_A < BIC_B < AIC_c$, maka distribusi A lebih sesuai untuk data pertukaran nilai mata uang Ringgit ke Rupiah. Dengan kata lain, model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika hasil uji statistik yang dilakukan pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum.