MENAKSIR PELUANG KELUAR PESERTA ASURANSI MENGGUNAKAN DISTRIBUSI UNIFORM DENGAN METODE MOMEN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh:

<u>NURHAYALIS</u>
10554001588

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2010

LEMBAR PERSETUJUAN

MENAKSIR PELUANG KELUAR PESERTA ASURANSI MENGGUNAKAN DISTRIBUSI UNIFORM DENGAN METODE MOMEN

TUGAS AKHIR

Oleh :

NURHAYALIS
10554001588

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Februari 2010

Koordinator Tugas Akhir	Pembimbing
Fitri Aryani, M.Sc	**Sri Basriati, M.Sc**
NIP. 19770913 200604 2 002	**NIP. 19790216 200710 2 001**

LEMBAR PENGESAHAN

MENAKSIR PELUANG KELUAR PESERTA ASURANSI MENGGUNAKAN DISTRIBUSI UNIFORM DENGAN METODE MOMEN

TUGAS AKHIR

Oleh :

NURHAYALIS
10554001588

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Februari 2010

Pekanbaru, 08 Februari 2010
Mengesahkan

Dekan	Ketua Jurusan
Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si	**Yuslenita Muda, M.Sc**
NIP. 19601125 198503 2 002	**NIP. 150 416 571**

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Drs. Martius, M.Hum	______________
Sekretaris	: Sri Basriati, M.Sc	______________
Anggota I	: Yuslenita Muda, M.Sc	______________
Anggota II	: Ari Pani Desvina, M.Sc	______________

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 08 Februari 2010
Yang membuat pernyataan,

NURHAYALIS
10554001588

LEMBAR PERSEMBAHAN

Terimakasih……..
Kepada Allah SWT atas rahmat dan karuniaNya kepada penulis
Atas kelancaran dalam penyusunan skripsi ini………

Kupersembahkan skripsi ini sebagai tanda baktiku kepada ayah dan ibu
Untuk do'a yang tidak pernah terputus, yang selalu dikirimkan
Untuk pengorbanan, cinta, dan kasih sayang yang tulus
Selalu hidup dihatiku…………

Terimakasih kepada uda Rudi, uda Icut, uda Rika & uda Ayong juga adekku
yang telah memberikan kasih sayang, bantun serta masukan
yang berarti kepada penulis

Untuk kasih sayang & perhatiannya
Penulis mengucapkan terimakasih kepada bang Yuti, S.Pi
Yang akan selalu ada dihati

Jika suatu hari entah besok atau kapan
Saat-saat indah yang kita lewati bersama
Mendapatkan sahabat sepertimu
Merupakan hadiah terindah yang pernah kudapatkan
Terimakasih teman-teman ku……

MENAKSIR PELUANG KELUAR PESERTA ASURANSI MENGGUNAKAN DISTRIBUSI UNIFORM DENGAN METODE MOMEN

NURHAYALIS
10554001588

Tanggal Sidang: 08 Februari 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Skripsi ini membahas tentang peluang keluar nasabah asuransi yang disebabkan oleh kasus meninggal dunia dan tidak mampu bayar. Peluang keluar tersebut akan ditaksir dengan metode momen menggunakan distribusi uniform untuk memberi kemudahan bagi perusahaan asuransi guna mengantisipasi semua yang terjadi dengan cara menetapkan premi yang tepat. Sehingga dapat disimpulkan bahwa peluang keluar taksiran *single decrement* untuk dua kasus yaitu kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar lebih besar dari pada peluang keluar *double decrement*.

Kata Kunci: Distribusi Uniform, Double Decrement, Metode Momen, Single Decrement

MENAKSIR PELUANG KELUAR PESERTA ASURANSI MENGGUNAKAN DISTRIBUSI UNIFORM DENGAN METODE MOMEN

NURHAYALIS
10554001588

Date of Final Exam: Februari 08th 2010
Graduation Ceremony Period : July, 2010

Mathematic Engineering Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis study about opportunity go out the insurance client wich is because of case death and unable to pay. The exit opportunity will be appraised with the momen method use the distribution uniform to give the amenity for insurance company utilize to anticipate all that happened by specifying correct premium. Inferential so that that opportunity go out the valuation of single decrement to two case that is case pass away and case unable to overpay is big the than at opportunity go out the double decrement.

***Keyword** : Double Decrement, Momen Method, Single Decrement, Uniform Distribution*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, bimbingan, dorongan semangat dan nasehat dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nazir, MA selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj Yenita Morena, M.Si selaku Plt. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Sangat teristimewa buat kedua orang tua, ayah dan ibu yang telah memberikan curahan kasih saying , didikan, do'a dan bantuan baik moril maupun materil.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku koordinator Tugas Akhir.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Khususnya di Jurusan Matematika.
8. Abang-abangku (Zamrudi, Trismanyanto, Rika, dan Ayong), adikku (Adek), Kakak ipar (Yanti, Zusrianti, Ningsih), dan keponakanku (Kelvin, Yoga, Zaskia, Mela, Sakti dan Said Arkhan) yang telah memberikan motivasi dan do'a secara terus – menerus untuk selalu tetap kepada tujuan utama.
9. Teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan 2005.

10. Buat some one special, yang selalu dihati (bang Yuti, S.Pi) terima kasih atas cinta, kasih sayang, perhatian dan dukungan yang diberikan selama ini. Semoga kita terus bersama selamanya.
11. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada bang Mahadir, S.Si yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman-teman Pondokan Yosi (kak marni, kak lilis, kak eti, Rita, neli, iyik, yanti, idar, ipit, inur, elni & rita kocik), yang belum wisuda.....cepat nyusul ya.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai Tugas Akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penyusunan Tugas Akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Pekanbaru, 08 Februari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

		Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	....	ii
LEMBAR PENGESAHAAN	....	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	....	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	....	vi
ABSTRAK	....	vii
ABSTRACT	....	viii
KATA PENGANTAR	....	ix
DAFTAR ISI	....	xi
DAFTAR LAMBANG	....	xiii
DAFTAR TABEL	....	xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah... I-1

1.2 Batasan Masalah... I-2

1.3 Perumusan Masalah I-3

1.4 Tujuan I-3

1.5 Manfaat Penelitian I-3

1.6 Sistematika Penulisan I-3

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Percepatan Mortalita II-1

2.2 Peluang Single Decrement dan Multiple Decrement... II-6

2.3 Peluang Multiple Decrement pada Distribusi Uniform II-8

24 Metode Momen... II-10

BAB III METODOLOGI

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

4.1 Penaksir Momen untuk Dua Kasus IV-1

4.2 Peluang Keluar Nasabah untuk Single Decrement IV-4

4.3 Peluang Keluar Nasabah untuk Double Decrement...... IV-11
4.4 Kasus Single decrement dan Double Decrement.......... IV-14
BAB V PENUTUP
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran... V-2
DAFTAR PUSTAKA
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR LAMBANG

l_x	: Orang yang menjadi nasabah asuransi pada usia x tahun
l_{x+1}	: Jumlah peserta asuransi yang berusia $x+1$ tahun
μ_x	: Percepatan mortalita
μ_{x+t}	: Percepatan mortalita nasabah yang berusia $x+t$ tahun
${}_x p_0$	: Peluang hidup orang yang berusia nol sampai x tahun
$s(x)$	: Fungsi survival
$p_x^{'(j)}$	: Peluang hidup *single decrement* nasabah yang berusia x sampai satu tahun karena kasus j
${}_t p_x^{(\tau)}$	: Peluang hidup total nasabah yang berusia x sampai $x+t$ tahun
${}_s q_x^{(j)}$	: Peluang keluar nasabah yang berusia x sampai $x+s$ tahun untuk *multiple decrement* karena kasus j
${}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}$	: Rata-rata nasabah yang keluar pada usia $x+r_i$ samapai $s-r_i$
$\hat{q}_x$	: Penaksir peluang keluar nasabah yang masuk asuransi pada usia x tahun
k_x	: Rata-rata nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi yang berusia x tahun
n_x	: Jumlah nasabah yang masuk perusahaan asuransi yang berusia x tahun
d_x	: Jumlah nasabah yang keluar karena kasus meninggal dunia
w_x	: Jumlah nasabah yang keluar karena kasus tidak mampu bayar
$\hat{q}_x^{(d)}$	: Penaksir peluang keluar untuk kasus meninggal dunia
$\hat{q}_x^{(w)}$	: Penaksir peluang keluar untuk kasus tidak mampu bayar

$q_x^{'(d)}$: Peluang keluar *single decrement* karena kasus meninggal dunia

$q_x^{'(w)}$: Peluang keluar *single decrement* karena kasus tidak mampu bayar

$q_x^{(d)}$: Peluang keluar *double decrement* karena kasus meninggal dunia

$q_x^{(w)}$: Peluang keluar *double decrement* karena kasus tidak mampu bayar

$\hat{q}_x^{'(d)}$: Taksiran peluang keluar *single decrement* karena kasus meninggal dunia

$\hat{q}_x^{'(w)}$: Taksiran peluang keluar *single decrement* karena kasus meninggal dunia

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

4.1 Dua kasus untuk usia 24-29 tahun dan usia 65-70 tahun........... IV-15

4.2 Peluang keluar nasabah untuk *single decrement*........................ IV-17

4.3 Peluang keluar nasabah untuk *double decrement* IV-19

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semua orang tidak terlepas dari bahaya baik itu terhadap harta benda yang dimiliki maupun jiwanya. Misalnya bahaya harta benda diantaranya kebakaran rumah dan rusaknya mobil karena kecelakaan, sedangkan yang menyangkut jiwa diantaranya yaitu sakit dan meninggal dunia. Semua bahaya itu akan menyebabkan timbulnya kerugian pada seseorang. Ketidakpastian mengenai kerugian disebut dengan resiko. Untuk mengantisipasi resiko yang terjadi maka orang memilih alternatif yaitu masuk asuransi.

Asuransi secara umum diartikan sebagai suatu cara pemindahan resiko dari seseorang kepada orang lain. Dengan adanya pemindahan resiko yang dilakukan melalui lembaga asuransi, maka apabila dimasa yang akan datang ada terjadi kerugian-kerugian yang diderita seseorang akibat resiko yang dihadapinya, maka kerugian yang dimaksud dapat dialihkannya kepada orang lain, yaitu kepada siapa ia memindahkan resiko tersebut. Secara lengkap definisi asuransi adalah suatu perjanjian dengan mana seorang mengikatkan diri kepada seorang tertanggung dengan menerima suatu premi untuk memberikan penggantian kepadanya karena kerugian/ kerusakan atau kehilangan keuntungan yang diharapkan yang mungkin akan dideritanya karena suatu peristiwa yang tak tentu. Secara garis besar asuransi dibagi dua yaitu asuransi kerugian dan asuransi jiwa. Yang akan dibahas pada skripsi ini adalah asuransi jiwa.

Asuransi jiwa adalah asuransi yang bertujuan menanggung orang terhadap kerugian finansial tak terduga yang disebabkan karena meninggal terlalu cepat. Resiko pada jiwa nasabah adalah menjadi pusat perhatian pada asuransi jiwa. Sebagai pihak penanggung (perusahaan asuransi) berusaha sebaik mungkin memperkirakan kapan resiko akan terjadi.

Sebuah ikatan kontrak asuransi (polis) memiliki masa kontrak tertentu, misalnya selama 5 tahun, 10 tahun, atau 20 tahun. Selama masa kontrak berjalan kemungkinan meninggalnya nasabah akan menjadi resiko yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi. Sehingga perusahaan asuransi harus menaksir peluang keluar nasabah. Jika perusahaan asuransi menaksir peluang permasa kontrak maka perusahaan asuransi bisa mengalami kerugian. Karena selang waktu yang ditaksir cukup panjang dan kemungkinan kesalahan dalam penaksir bisa besar. Untuk memperkecil kesalahan dalam menaksir peluang keluar nasabah maka perusahaan asuransi harus menaksir peluang keluar pertahun. Waktu pertahun itu dibagi menjadi tiga kondisi. Untuk menaksir peluang keluar pertahun maka penulis menggunakan suatu metode yaitu *metode momen*. Dengan mengasumsikan bahwa peluang keluar nasabah asuransi *berdistribusi uniform* sehingga diperoleh percepatan mortalita asuransi konstan.

Umumnya setiap tahun jumlah nasabah asuransi dalam suatu kelompok tertentu semakin berkurang karena ada sejumlah nasabah yang keluar, diantaranya karena kasus meninggal dunia, tidak mampu bayar, dan hilang tidak ada berita. Banyaknya nasabah yang meninggal dunia akan menjadi tanggung jawab perusahaan asuransi untuk membayar uang pertanggungan sesuai dengan polis. Sedangkan untuk kasus yang selain meninggal misalnya nasabah keluar karena tidak mampu bayar, ini akan memberi dampak kepada perusahaan asuransi karena pengurangan jumlah nasabah akan mempengaruhi uang yang masuk diperusahaan asuransi. Sehingga dengan demikian perusahaan asuransi harus menaksir peluang keluar terhadap kasus-kasus yang terjadi. Berdasarkan latar belakang inilah penulis tertarik untuk melakukan penelitian dan menuangkannya menjadi skripsi dengan judul **”Menaksir Peluang keluar Peserta Asuransi Menggunakan distribusi Uniform dengan metode Momen”**

1.2 Batasan Masalah

Untuk memperkecil kesalahan dalam menaksir peluang keluar nasabah pertahun maka waktu pertahun dibagi lagi menjadi tiga kondisi.

Misalkan $x + r_i (0 \le r_i < 1)$ menyatakan usia orang ke i yang masuk asuransi dan $x + s_i (0 < s_i \le 1)$ menyatakan usia orang ke i yang keluar menjadi peserta asuransi maka ada tiga kemungkinan kondisi usia lamanya bertahan orang ke i yang menjadi peserta asuransi yaitu:

- Kondisi untuk $r_i = 0$ dan $s_i = 1$, artinya nasabah masuk asuransi pada usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun.
- Kondisi untuk $r_i > 0$ dan $s_i = 1$, artinya nasabah masuk asuransi setelah usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun.
- Kondisi untuk $r_i = 0$ dan $s_i < 1$, artinya nasabah masuk asuransi pada usia x tahun dan keluar sebelum usia $x+1$ tahun.

1.3 Perumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menaksir peluang keluar peserta asuransi menggunakan distribusi uniform dengan metode momen.

1.4 Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui peluang keluar *single decrement* dan peluang keluar *double decrement* dari kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar maka akan memberi kemudahan bagi perusahaan asuransi untuk mengantisipasi semua yang terjadi dengan cara menetapkan premi yang tepat.

1.5 Manfaat

Memperkirakan resiko yang akan terjadi perusahaan asuransi bisa mempersiapkan sejumlah uang pertanggungan yang harus dibayar kepada pihak tertanggung (nasabah asuransi).

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, batasan masalah, perumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori pendukung apa saja untuk penelitian ini.

Bab III Metodologi

Bab ini memaparkan tentang apa yang akan di jelaskan dan dijabarkan langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan skripsi ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini menyajikan atau menganalisa tentang taksiran peluang keluar *single decrement* dan peluang keluar *double decrement.*

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran-saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Percepatan Mortalita

Nasabah dari suatu perusahaan asuransi, selama interval waktu satu tahun jumlahnya pada umumnya cenderung berkurang. Hal ini terjadi, karena ada nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi, misalnya disebabkan nasabah meninggal dunia, nasabah tidak mampu membayar lagi, atau nasabah hilang tanpa berita. Sehingga untuk tahun berikutnya jumlah nasabah asuransi menjadi berkurang. Misalkan ada sejumlah l_x orang yang menjadi nasabah asuransi pada usia x. Setelah satu tahun berikutnya jumlah nasabah yang berusia $x+1$ tahun berkurang menjadi l_{x+1}. Dengan demikian ada sejumlah $l_x - l_{x+1}$ nasabah yang tidak mampu mencapai usia $x+1$ tahun. Misalkan pada waktu Δt ada sejumlah $l_x - l_{x+\Delta t}$ nasabah yang keluar. Penurunan jumlah nasabah dari usia x tahun sampai usia $x+\Delta t$ tahun disebut dengan laju penurunan nasabah dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{\Delta t} \tag{2.1}$$

laju penurunan nasabah asuransi dibagi dengan jumlah nasabah asuransi di awal tahun disebut dengan tingkat mortalita, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{l_x \Delta t} \tag{2.2}$$

Jika pada tingkat mortalita Δt menuju nol ($\Delta t \to 0$) maka ini disebut dengan percepatan mortalita (*force of mortality*) dan dinotasikan dengan μ_x yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{l_x \Delta t} \tag{2.3}$$

dalam bentuk lain percepatan mortalitas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx} l_x \tag{2.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.4) percepatan mortalita dapat ditentukan dengan menggunakan data dalam tabel mortalita. Sedangkan secara matematika percepatan mortalita dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi yaitu fungsi densitas, fungsi distribusi kumulatif, maupun fungsi survival.

Definisi 2.1 Misalkan ${}_x p_0$ menyatakan peluang hidup orang yang berusia nol sampai x tahun, maka fungsi survival (*survival funtion*) orang yang berusia x tahun dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s(x) = {}_x p_0 \tag{2.5}$$

percepatan mortalita dapat juga dinyatakan dalam fungsi survival sebagai berikut. berdasarkan persamaan (2.4) dapat juga ditulis dengan:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx} l_x \cdot \frac{l_0}{l_0}$$

$$\mu_x = -\frac{1}{\frac{l_x}{l_0}}\frac{d}{dx}\frac{l_x}{l_0}$$

$$\mu_x = -\frac{1}{{}_x p_0}\frac{d}{dx}\,{}_x p_0 \tag{2.6}$$

yang mana l_0 menyatakan jumlah orang pada usia nol tahun. Dengan menggunakan persamaan (2.5) ke persamaan (2.6), maka percepatan mortalita orang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dalam fungsi survival yaitu sebagai berikut:

$$\mu_x = -\frac{\frac{d}{dx} s(x)}{s(x)}$$

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} \tag{2.7}$$

selanjutnya akan dilihat hubungan antara fungsi densitas, fungsi distribusi kumulatif, dan fungsi survival. Secara umum fungsi densitas dan fungsi distribusi kumulatif dinyatakan dengan variabel acak diskrit yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.2 Jika semua nilai dari peubah acak X adalah $x_1, x_2, ..., x_n$ atau $x_1, x_2, ...,$ maka X disebut variabel acak diskrit.

$$f(x) = p_x(x) = p[X = x], \quad x = x_1, x_2 ..... \tag{2.8}$$

yang memberi peluang untuk setiap nilai x, dan ini disebut dengan fungsi densitas diskrit.

Definisi 2.3 Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X adalah untuk x bilangan real maka

$$F(x) = P[X \le x] \tag{2.9}$$

suatu kejadian yang memiliki peluang atau memiliki fungsi densitas $f(x)$ dari suatu peubah acak X .

Definisi 2.4 Jika X peubah acak diskrit dengan fungsi densitas $f(x)$, maka nilai harapan dari X adalah

$$E(X) = \sum_x x p_x(x) \tag{2.10}$$

Definisi 2.5 Misalkan ξ ruang peubah acak kontinu X . Maka $f(x)$ dikatakan fungsi densitas peluang kontinu jika:

a) $f(x) \ge 0, \forall x \in \xi$

b) $\int_\xi f(x) dx = 1$

Definisi 2.6 Misalkan X suatu peubah acak kontinu. Maka fungsi distribusi kumulatif didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt, \text{ untuk } -\infty < x < \infty \tag{2.11}$$

hubungan $f(x)$ dan $F(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.12}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dapat dinyatakan suatu fungsi baru yang memiliki hubungan dengan fungsi distribusi kumulatif yang dinotasikan dengan $\overline{F}$ dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\overline{F} = 1 - F(x) \tag{2.13}$$

$$\overline{F} = \Pr(X > x)$$

dalam asuransi variabel acak X sering digunakan untuk menyatakan usia nasabah. Jadi fungsi $\overline{F}$ dapat diartikan sebagai peluang nasabah itu hidup mencapai usia yang lebih besar dari x tahun. Pada asuransi fungsi $\overline{F}$ dinyatakan sebagai fungsi kehidupan dikenal dengan istilah fungsi survival, yang dinotasikan dengan $s(x)$ dan dinyatakan sebagai berikut:

$$s(x) = \Pr(X > x) \tag{2.14}$$

dari persamaan (2.14) maka persamaan (2.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$s(x) = 1 - F(x) \tag{2.15}$$

berdasarkan persamaan (2.15) dan (2.12) maka diperoleh hubungan $s(x)$ dan $f(x)$ sebagai berikut:

$$f(x) = -\frac{ds(x)}{dx} \tag{2.16}$$

percepatan mortalita nasabah yang berusia x dalam bentuk fungsi dapat dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 2.1 Jika μ_{x+t} menyatakan percepatan mortalita nasabah yang berusia $x+t$ maka peluang hidup nasabah yang berusia x sampai n tahun yang dinotasikan dengan ${}_n p_x$ adalah

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_{x+t}\, dt} \tag{2.17}$$

Bukti:

Diketahui μ_{x+t} menyatakan percepatan mortalita nasabah yang berusia $x+t$, akan ditunjukkan peluang hidup nasabah yang berusia x sampai n tahun yang dinotasikan dengan ${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_{x+t} dt}$

berdasarkan persamaan (2.4) dapat juga ditulis sebagai:

$$\mu_y = \frac{-s^{'}(y)}{s(y)}$$

$$\mu_y = \frac{-\frac{ds(y)}{dy}}{s(y)}$$

dengan mengintegralkan kedua ruas maka diperoleh,

$$\int_x^{x+n} \mu_y dy = -\int_x^{x+n} \frac{1}{s(y)} \frac{ds(y)}{dy} dy$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \int_x^{x+n} \frac{ds(y)}{s(y)}$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \ln s(y) \Big]_x^{x+n}$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \ln\left(\frac{s(x+n)}{s(x)}\right)$$

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \ln {}_n p_x$$

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y dy}$$

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_{x+t} dt} \qquad \blacksquare \qquad (2.18)$$

berdasarkan persamaan (2.18) maka peluang hidup untuk $[0,n]$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$${}_n p_x = e^{-\int_0^{n} \mu_{x+t} dt}$$

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}dt} \tag{2.19}$$

Suatu perusahaan asuransi, selain banyaknya nasabah yang masuk menjadi nasabah asuransi tidak terlepas juga dari masalah keluarnya nasabah dari perusahaan asuransi yang diakibatkan oleh beberapa faktor tertentu yang disebut kasus. Misalnya kasus nasabah meninggal dunia, kasus tidak mampu membayar lagi, dan kasus lain sebagainya. Sehingga jumlah nasabah asuransi untuk n tahun berikutnya menjadi menurun. Dengan demikian, perusahaan asuransi harus mengetahui seberapa besar peluang keluar nasabah yang disebabkan oleh satu kasus dan beberapa kasus.

2.2 Peluang *Single decrement* dan peluang *Multiple decrement*

Pada perusahaan asuransi jumlah nasabah asuransi untuk n tahun berikutnya cenderung menurun. Jika penurunan nasabah asuransi diakibatkan oleh satu kasus maka ini disebut dengan bentuk *single decrement*. Misalnya penurunan jumlah nasabah karena meninggal dunia saja atau karena tidak mampu bayar saja. Sedangkan penurunan nasabah asuransi yang disebabkan oleh beberapa kasus maka disebut dengan bentuk *multiple decrement*. Misalnya penurunan nasabah asuransi karena tiga kasus yaitu kasus meninggal dunia, tidak mampu bayar, dan kasus kurangnya kepercayaan nasabah terhadap perusahaan asuransi. Peluang masuk nasabah asuransi yang berusia x tahun sampai 1 tahun berikutnya karena kasus j dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.7 Misalkan $\mu_{x+t}^{(j)}$ menyatakan percepatan mortalita nasabah yang berusia $x+t$ tahun, maka peluang hidup *single decrement* nasabah yang berusia x sampai satu tahun berikutnya karena kasus j dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p_x'^{(j)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(j)}dt} \tag{2.20}$$

Dalam *multiple decrement* jumlah orang yang masuk asuransi dari semua kasus disebut dengan *total*, yang dinotasikan dengan τ. Peluang hidup total untuk orang yang berusia x sampai 1 tahun berikutnya dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.8 Misalkan $\mu_{x+t}^{(\tau)}$ menyatakan percepatan mortalita total nasabah yang berusia $x+t$ tahun, maka peluang hidup total nasabah yang berusia x sampai 1 tahun berikutnya dinyatakan sebagai berikut:

$$p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(j)} dt} \tag{2.21}$$

peluang keluar nasabah asuransi untuk *multiple decrement* karena kasus j dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.9 Misalkan ${}_t p_x^{(\tau)}$ menyatakan peluang hidup total nasabah yang berusia x sampai $x+t$ tahun, $\mu_{x+t}^{(j)}$ menyatakan percepatan mortalita orang yang berusia $x+t$ tahun karena kasus j, maka peluang keluar nasabah yang berusia x sampai $x+s$ tahun untuk *multiple decrementi* karena kasus j dinyatakan sebagai berikut:

$${}_s q_x^{(j)} = \int_0^s {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \tag{2.22}$$

dari persamaan (2.22) maka dapat dinyatakan peluang keluar nasabah asuransi pertahun dengan menggantikan $s=1$ sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \tag{2.23}$$

Peluang keluar total nasabah asuransi pertahun dinyatakan sebagai berikut:

$$q_x^{(\tau)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt \tag{2.24}$$

Hubungan peluang hidup dan peluang keluar nasabah asuransi pada $[x, x+1]$ untuk *single decrement* dan total dari kasus j dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.10 Misalkan $p_x^{'(j)}$ menyatakan peluang hidup nasabah yang berusia x sampai satu tahun berikutnya karena kasus j, maka peluang hidup total nasabah yang berusia x sampai satu tahun berikutnya adalah:

$$p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{n} p_x^{'(j)} \tag{2.25}$$

2.3 Peluang *Multiple decrement* Dalam Distribusi Uniform

Pada sub bab (2.1) bahwa percepatan mortalita dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi survival. Percepatan mortalita dapat dinyatakan dalam distribusi, karena setiap distribusi memiliki fungsi densitas. Jika pada suatu distribusi diketahui fungsi densitasnya maka bisa dicari fungsi distribusi kumulatif dan fungsi survivalnya. Pada skripsi ini penulis mengasumsikan percpatan mortalita nasabah berdistribusi uniform, yang memiliki fungsi densitas sebagai berikut:

Definisi 2.11 Untuk suatu peubah acak pada interval $[a,b]$ fungsi densitasnya sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad , a \le x \le b \tag{2.26}$$

$$f(x) = 0 \qquad , x \ lainnya$$

Untuk distribusi uniform digunakan ω sebagai parameternya yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.12 Jika distribusi uniform digunakan sebagai sebuah fungsi survival, maka digunakan ω sebagai parameter sehingga fungsi densitasnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\omega} \quad , 0 \le x \le \omega$$

fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi uniform dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.11) dari persamaan (2.26) bahwa fungsi densitas untuk distribusi uniform adalah:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

dengan menggunakan persamaan (2.11) maka diperoleh

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy$$

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\omega}dy$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{\omega}\cdot y\right]_0^x$$

$$F(x)=\frac{1}{\omega}\cdot x$$

$$F(x)=\frac{x}{\omega} \tag{2.27}$$

Definisi 2.13 Jika μ_x adalah percepatan mortalita, $f(x)$ adalah fungsi densitas dan $F(x)$ fungsi distribusi dari seseorang yang berusia x tahun, maka percepatan mortalitanya adalah:

$$\mu_x=\frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{2.28}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.27) ke persamaan (2.15) maka diperoleh fungsi survival seabagai berikut:

$$s(x)=1-F(x)$$

$$s(x)=1-\frac{x}{\omega}$$

$$s(x)=\frac{\omega-x}{\omega} \tag{2.29}$$

selanjutnya mensubstitusikan persamaan (2.27) dan (2.29) kepersamaan (2.28) maka diperoleh percepatan mortalita nasabah yang berusia x sebagai berikut:

$$\mu_x=\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

$$\mu_x = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega - x}{\omega}$$

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \qquad (2.30)$$

Definisi 2.14 Misalkan $q_x^{'(j)}$ peluang keluar karena kasus j, dalam distribusi uniform peluang hidup single decrement nasabah yang berusia x tahun sampai 1 tahun berikutnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p_x^{'(j)} = 1 - t \cdot q_x^{'(j)} \qquad (2.31)$$

2.4 Metode Momen

Metode momen merupakan suatu metode yang digunakan untuk menaksir suatu parameter. Salah satu parameter itu adalah rata-rata. Misalnya rata-rata nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi dalam satu tahun. Fungsi pembangkit momen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_x(t^*) = E\left(e^{t^* x}\right) \qquad (2.32)$$

persamaan (2.32) dikatakan fungsi pembangkit momen dari X, jika nilai harapan ada untuk semua nilai dari t^* dengan $-h < t^* < h$ untuk $h > 0$.

Untuk peubah acak diskrit dapat ditentukan ekspektasinya seperti pada persamaan (2.10). Dengan demikian, fungsi pembangkit momen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_x(t^*) = \sum_{x_i=1}^{m} e^{t^* x} p_x(x_i) \qquad (2.33)$$

jika persamaan (2.33) diturunkan terhadap t maka diperoleh turunan pertama, turunan kedua, sampai turunan ke (r) sebagai berikut:

$$M_x^{(1)}(t^*) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i e^{t^* x_i} p_x(x_i)$$

$$M_x^{(2)}(t^*) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i^2 e^{t^* x_i} p_x(x_i)$$

$$\vdots$$

$$M_x^{(r^*)}(t^*) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i^{r^*} e^{t^* x_i} p_x(x_i) \tag{2.34}$$

momen ke r^* disekitar titik asal yaitu $t^* = 0$ dinyatakan sebagai berikut:

$$M_x^{(r^*)}(0) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i^{r^*} e^{0 \cdot x_i} p_x(x_i)$$

$$M_x^{(r^*)}(0) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i^{r^*} p_x(x_i) = E\left(X^{r^*}\right) \tag{2.35}$$

dari persamaan (2.35) maka momen pertama $(r_i = 1)$ disekitar titik asal adalah:

$$M_x^{(1)}(0) = \sum_{x_i=1}^{m} x_i p_x(x_i) = E(X) \tag{2.36}$$

Berdasarkan persamaan (2.36) maka momen pertama merupakan rata-rata dari suatu variabel acak X. Pada skripsi ini momen pertama digunakan untuk menentukan rata-rata nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi. Sehingga langkah dalam menentukan peluang keluar nasabah asuransi ini disebut dengan metode momen.

Misalkan pada $[x, x+1]$, ada orang yang masuk menjadi nasabah asuransi pada usia x tahun. Pada saat $x+1$ tahun berikutnya ada dua kemungkinan yang terjadi yaitu kemungkinan nasabah akan bertahan menjadi peserta asuransi atau kemungkinan nasabah akan keluar dari perusahaan asuransi. Dengan demikian akan ditaksir berapa rata-rata keluarnya nasabah dari perusahaan asuransi.

Pada $[x, x+1]$ ada nasabah yang masuk dan keluar dari asuransi diantara usia x tahun dan $x+1$ tahun. Misalkan r_i tambahan usia nasabah ke-i berusia x tahun yang masuk asuransi dan s_i tambahan usia nasabah ke-i berusia x tahun yang keluar asuransi, maka interval waktu satu tahun dapat dinyatakan dengan $[x + r_i, x + s_i]$, dengan r_i yang nilainya $0 \le r_i < 1$ dan nilai s_i yang nilainya $0 < s_i \le 1$. Misalkan pada usia $x + r_i$ tahun ada orang yang masuk menjadi nasabah asuransi, maka pada usia $x+s_i$ tahun berikutnya ada dua kemungkinan yang terjadi pada nasabah yaitu nasabah tetap bertahan hidup atau nasabah keluar dari perusahaan asuransi. Dengan demikian ruang sampel (RS) nasabah dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$RS = \{bertahan, keluar\}$$

Misalkan K variabel acak yang menyatakan seorang nasabah keluar dari perusahaan asuransi pada $[x+r_i, x+s_i]$. Maka ruang variabel acak K dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$K = \{0,1\}$$

Misalkan $k \in K$, maka dapat diartikan bahwa $k=1$ menyatakan nasabah keluar dan $k=0$ menyatakan nasabah bertahan. Kemudian peluang seseorang nasabah pada $[x+r_i, x+s_i]$ untuk $K=\{1,0\}$ adalah:

$$p_k^{(1)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}$$

$$p_k^{(0)} = {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}$$

dengan menggunakan persamaan (2.36) maka rata-rata keluar seorang nasabah dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_K^{(1)}(0) = E(K) = \sum_{k_i=0}^{1} k_i \, p_K(k_i)$$

$$M_K^{(1)}(0) = E(K) = 0 \cdot {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i} + 1 \cdot {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}$$

Jadi rata-rata seorang nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi adalah ${}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}$. Jika pada $[x+r_i, x+s_i]$ ada sejumlah n_x nasabah yang berusia x tahun masuk asuransi dan misalkan K_x peubah acak yang menyatakan banyaknya nasabah berusia x tahun keluar dari perusahaan asuransi , maka rata-rata n_x nasabah yang keluar dinyatakan sebagai berikut:

$$M_{K_x}^{(1)}(0) = E[K_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i} \qquad (2.37)$$

Misalkan rata-rata dari n_x nasabah yang keluar menyatakan jumlah nasabah yang keluar dari suatu perusahaan asuransi pada $[x+r_i, x+s_i]$ yang dinyatakan dengan k_x, maka persamaan (2.37) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_{K_x}^{(1)}(0) = E[K_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} = k_x \tag{2.38}$$

persamaan (2.38) disebut dengan persamaan momen.

Berdasarkan persamaan (2.38) maka akan ditentukan penaksir momen dengan menggunakan suatu pendekatan yang dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.15 Misalkan ${}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}$ menyatakan rata-rata nasabah yang keluar pada usia $x+r_i$ sampai $s-r_i$ tahun, maka pendekatan rata-rata nasabah yang keluar pada interval $[x+r_i, x+s_i]$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$${}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx (s_i - r_i)q_x \tag{2.39}$$

berdasarkan persamaan (2.38) maka banyaknya nasabah yang keluar dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} = k_x \tag{2.40}$$

dengan menggunakan persamaan (2.39) maka persamaan (2.40) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)q_x = k_x$$

$$q_x \sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i) = k_x \tag{2.41}$$

berdasarkan persamaan (2.41) akan diperoleh nilai q_x yang digunakan sebagai penaksir peluang keluar nasabah pada interval $[x+r_i, x+s_i]$. Sehingga q_x dinyatakan sebagai $\hat{q}_x$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{q}_x = \frac{k_x}{\sum_{i=}^{n_x} (s_i - r_i)} \tag{2.42}$$

persamaan (2.42) merupakan peluang keluar yang ditaksir melalui momen.

Pada $[x+r_i, x+s_i]$ maka dapat dinyatakan ada tiga kondisi interval usia nasabah ke-i yang menjadi peserta asuransi yaitu sebagai berikut:

a. Kondisi untuk $r_i = 0$ dan $s_i = 1$, artinya nasabah masuk asuransi pada usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun.
b. Kondisi untuk $r_i > 0$ dan $s_i = 1$, artinya nasabah masuk asuransi setelah usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun.
c. Kondisi untuk $r_i = 0$ dan $s_i < 1$, artinya nasabah masuk asuransi pada usia x tahun dan keluar sebelum usia $x+1$ tahun.

Pada skripsi ini akan dibahas peluang keluar nasabah yang masuk pada usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun. Untuk menentukan peluang keluar selama satu tahun pada $[x+r_i, x+s_i]$, maka kondisi yang memenuhi adalah kondisi (a) yaitu kondisi $r_i = 0$ dan $s_i = 1$.

Berdasarkan persamaan (2.42) maka untuk $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ diperoleh penaksir peluang keluar nasabah yang masuk pada usia x tahun dan keluar pada usia $x+1$ tahun sebagai berikut:

Berdasarkan persamaan (2.42) dengan mensubstitusikan nilai $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ maka diperoleh

$$\hat{q}_x = \frac{k_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(1-0)}$$

$$\hat{q}_x = \frac{k_x}{\sum_{i=1}^{n_x}1}$$

$$\hat{q}_x = \frac{k_x}{n_x} \tag{2.43}$$

Persamaan (2.43) merupakan bentuk umum dari penaksir peluang keuar nasabah asuransi pada $[x, x+1]$ dengan n_x menyatakan jumlah nasabah berusia x tahun yang masuk dan k_x menyatakan rata-rata nasabah yang berusia x tahun keluar. Akan ditentukan penaksir peluang keluar nasabah asuransi dalam bentuk kasus yaitu kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar.

BAB III

METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada skripsi ini adalah metode studi literature dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk peluang keluar perkasus (*single decrement)*.
2. Menentukan penaksir momen untuk peluang keluar perkasus *(single decrement)*.
3. Menentukan bentuk peluang keluar dua kasus *(double decrement)*.
4. Menentukan hubungan peluang keluar perkasus dan dua kasus.
5. Menentukan persamaan peluang keluar dua kasus dengan asumsi distribusi uniform.
6. Menentukan penaksir momen untuk peluang keluar dua kasus *(double decrement)*.
7. Menaksir peluang keluar bentuk dua kasus dengan asumsi distribusi uniform.
8. Membandingkan peluang keluar dua kasus melalui tabel mortalita untuk usia 65-70 tahun dan usia 24-29 tahun.

BAB IV

PEMBAHASAN

Perusahaan asuransi banyak fenomena yang terjadi bahwa nasabah keluar dari perusahaan asuransi sebelum masa kontrak berakhir. Hal ini disebabkan oleh faktor tertentu seperti nasabah meninggal dunia, nasabah tidak mampu bayar dengan alasan tertentu, keluar dari perusahaan asuransi dengan sengaja, dan faktor penyebab lain sebagainya. Pada skripsi ini hanya dibahas untuk dua kasus penyebab keluar nasabah yaitu karena meninggal dunia dan karena tidak mampu bayar. Peluang keluar nasabah karena masing-masing kasus yaitu kasus meninggal dunia atau kasus tidak mampu bayar disebut dengan peluang keluar *single decrement*. Sedangkan peluang keluar nasabah yang disebabkan kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar, maka ini disebut dengan peluang keluar *double decrement*. Peluang *single decrement* dan *double decrement* pada skripsi ini akan dilihat menggunakan distribusi uniform.

4.1 Penaksir Peluang Keluar untuk Dua Kasus

Pada sub bab (2.7) tentang metode momen telah diperoleh penaksir momen sebagai penaksir peluang keluar nasabah dalam bentuk umum seperti pada persamaan (2.42). Pada sub bab ini akan ditentukan penaksir peluang keluar dalam kasus yang dinotasikan dengan j, dalam hal ini kasus yang diambil yaitu kasus meninggal dunia yang dinotasikan dengan d dan kasus tidak mampu bayar yang dinotasikan dengan w, Sehingga dapat dinyatakan bahwa kasus $j = \{d, w\}$. Peluang keluar *double decrement* nasabah pada interval $[x, x+1]$ karena kasus meninggal dunia dinyatakan dengan $q_x^{(d)}$ dan kasus tidak mampu bayar dinyatakan dengan $q_x^{(w)}$. Pada persamaan (2.38) merupakan persamaan momen dalam bentuk umum. Sedangkan persamaan momen untuk dua kasus dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 4.1 Misalkan D_x, W_x suatu peubah acak berturut-turut menyatakan banyaknya nasabah berusia x tahun yang keluar karena kasus meninggal dunia dan karena kasus tidak mampu bayar, d_x dan w_x berturut-turut menyatakan banyak nasabah yang keluar karena kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar, maka persamaan momen untuk kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar berturut-turut dapat dinyatakan sebagai berikut:

a. $$M_{D_x}^{(1)}(0) = E[D_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = d_x \tag{4.1}$$

b. $$M_{W_x}^{(1)}(0) = E[W_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}^{(w)} = w_x \tag{4.2}$$

Untuk menentukan penaksir peluang keluar dari persamaan (4.1) dan (4.2) maka digunakan suatu pendekatan seperti pada definisi (2.34). Bentuk kasus pendekatan pada persamaan (2.39) dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$ {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}^{(d)} \approx (s_i - r_i)q_x^{(d)} \tag{4.3}$$

$$ {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}^{(w)} \approx (s_i - r_i)q_x^{(w)} \tag{4.4}$$

Teorema 4.1 Jika d_x menyatakan jumlah nasabah yang keluar karena kasus meninggal dunia, w_x menyatakan jumlah nasabah yang keluar karena kasus tidak mampu bayar , maka penaksir peluang keluar untuk dua kasus yang menyatakan peluang keluar karena meninggal dunia dan peluang keluar karena tidak mampu bayar pada $[x + r_i, x + s_i]$ berturut-turut sebagai berikut:

a. $$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)} \tag{4.5}$$

b. $$\hat{q}_x^{(w)} = \frac{w_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(s_i - r_i)} \tag{4.6}$$

Bukti :

(a) Berdasarkan persamaan (4.1) maka banyaknya nasabah yang keluar karena kasus meninggal dunia dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n_x} {}_{s_i - r_i} q_{x+r_i}^{(d)} = d_x \qquad (4.7)$$

dengan menggunakan persamaan (4.4) maka persamaan (4.7) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - r_i) q_x^{(d)} = d_x$$

$$q_x^{(d)} \sum_{i=1}^{n} (s_i - r_i) = d_x \qquad (4.8)$$

dari persamaan (4.8) akan diperoleh nilai $\hat{q}_x^{(d)}$ yang digunakan sebagai penaksir peluang keluar nasabah karena meninggal dunia pada $[x + r_i, x + s_i]$. Sehingga q_x^d dinyatakan sebagai $\hat{q}_x^{(d)}$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)}$$

(b) Dengan cara yang sama seperti pada bukti untuk (a), maka untuk kasus tidak mampu bayar dioperoleh penaksir peluang keluar nasabah asuransi untuk kasus tidak mampu bayar sebagai berikut:

$$\hat{q}_x^{(w)} = \frac{w_x}{\sum_{i=1}^{n_x} (s_i - r_i)} \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan persamaan (4.5) dan (4.6) maka untuk kondisi $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ yang menyatakan peluang keluar nasabah asuransi pada $[x, x+1]$ akan diperoleh sebagai berikut:

1) Untuk kasus meninggal dunia

Berdasarkan persamaan (4.5) dengan mensubstitusikan nilai $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ diperoleh:

$$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(1-0)}$$

$$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n_x}1}$$

$$\hat{q}_x^{(d)} = \frac{d_x}{n_x} \tag{4.9}$$

2) Untuk kasus tidak mampu bayar

Seperti pada kasus meninggal dunia, dengan cara yang sama disubstitusikan nilai $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ pada persamaan (4.6) maka diperoleh

$$\hat{q}_x^{(w)} = \frac{w_x}{n_x} \tag{4.10}$$

peluang keluar nasabah dari perusahaan asuransi karena dua kasus yaitu kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar untuk jangka waktu setahun dapat ditaksir dengan menggunakan persamaan (4.9) dan (4.10).

4.2 Penaksir Peluang Keluar untuk *Single Decrement*

Peluang keluar nasabah untuk *single decrement* merupakan peluang keluar nasabah untuk masing-masing kasus dari banyak kasus yang terjadi. Pada skripsi ini dibahas dua kasus yaitu kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar. Misalnya ada sejumlah nasabah yang masuk asuransi pada $[x, x+1]$, maka peluang keluar *single decrement* karena kasus meninggal dunia dinyatakan dengan $q_x^{'(d)}$, sedangkan peluang keluar *single decrement* karena kasus tidak mampu bayar dinyatakan dengan $q_x^{'(w)}$. Peluang keluar *single decrement* ditentukan melalui hubungannya dengan peluang keluar *double decrement*. Hubungan peluang keluar *single decrement* dan peluang keluar *double decrement* ditentukan dengan menggunakan distribusi uniform.

Peluang keluar *multiple decrement* nasabah asuransi pada $[x, x+1]$ karena kasus j dinyatakan pada persamaan (2.23). Peluang keluar nasabah yang *multiple decrement* nasabah yang keluar karena kasus j dalam interval waktu selama satu tahun dinyatakan sebagai berikut:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+u}^{(j)} du \tag{4.11}$$

karena $j = \{d, w\}$ maka dari persamaan (4.11) dapat dinyatakan peluang keluar nasabah karena meninggal dunia dan peluang keluar nasabah karena tidak mampu bayar berturut-turut sebagai berikut:

a. $$q_x^{(d)} = \int_0^1 p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+u}^{(d)} du \tag{4.12}$$

b. $$q_x^{(w)} = \int_0^1 p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+u}^{(w)} du \tag{4.13}$$

percepatan mortalita nasabah yang berusia $x+t$ tahun didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.2 Misalkan $q_{x+r_i}^{'(d)}$ dan $q_{x+r_i}^{'(w)}$ masing-masing adalah penaksir peluang keluar yang disebabkan oleh kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar, maka percepatan mortalita untuk nasabah yang berusia $x+t$ tahun karena kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar berturut-turut dinyatakan sebagai berikut:

a. $$\mu_{x+t}^{(d)} = \frac{q_x^{'(d)}}{1 - t \cdot q_x^{'(d)}} \tag{4.14}$$

b. $$\mu_{x+t}^{(w)} = \frac{q_x^{'(w)}}{1 - t \cdot q_x^{'(w)}} \tag{4.15}$$

Hubungan peluang hidup total dengan peluang hidup *single decrement* pada $[x, x+1]$ seperti pada persamaan (2.23). karena untuk dua kasus $j = \{d, w\}$ maka dari persamaan (2.23) dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$p_x^{\tau} = p_x^{'(d)} \cdot p_x^{'(w)} \tag{4.16}$$

Berdasarkan persamaan (4.16) maka untuk $[x+r_i, x+s_i]$ peluang hidup total dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{(\tau)} = {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(d)} \cdot {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(w)} \tag{4.17}$$

peluang hidup nasabah untuk *single decrement* pada $[x, x+1]$ karena kasus j mengikuti distribusi uniform dapat dinyatakan pada persamaan (2.31). pada $[x+r_i, x+s_i]$ maka dapat dinyatakan peluang hidup nasabah untuk *single decrement* karena kasus j mengikuti distribusi uniform dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(j)} = 1 - t \cdot {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(j)} \tag{4.18}$$

berdasarkan persamaan (4.18) dengan $j = \{d, w\}$ maka diperoleh peluang hidup *single decrement* untuk kasus meninggal dunia dan peluang hidup *single decrement* untuk kasus tidak mampu bayar mengikuti distribusi uniform sebagai berikut:

$$_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(d)} = 1 - t \cdot {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)} \tag{4.19}$$

$$_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(w)} = 1 - t \cdot {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)} \tag{4.20}$$

Peluang keluar untuk kasus meninggal dan peluang keluar untuk kasus tidak mampu bayar pada persamaan (4.12) dan (4.13) dapat juga dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut:

Teorema 4.2 Misalkan $q_{x+r_i}^{'(d)}$ menyatakan penaksir peluang keluar peserta asuransi karena kasus meninggal dunia, dan $q_{x+r_i}^{'(w)}$ menyatakan peluang keluar peserta asuransi karena kasus tidak mampu bayar maka peluang keluar nasabah pada usia $x+r_i$ tahun sampai $s_i - r_i$ tahun berikutnya karena kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar berturut-turut adalah:

a. $\quad {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}\left[1-\frac{1}{2}\,{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\right]$ (4.21)

b. $\quad {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(w)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\left[1-\frac{1}{2}\,{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}\right]$ (4.22)

Bukti :

(a) Dengan menggunakan persamaan (4.17) dan persamaan (4.14) maka persamaan (4.12) menjadi

$$ {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = \int_0^1 {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(d)} \cdot {}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{'(w)} \cdot \mu_{x+u}^{(d)}du \qquad (4.23)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.19) dan (4.20) ke persamaan (4.23) maka diperoleh

$$ {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = \int_0^1 \left[1-u\cdot{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}\right]\left[1-u\cdot{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\right]\frac{{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}}{1-u\cdot{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}}du$$

$$ {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}\int_0^1 \left[1-u\cdot{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\right]du$$

$$ {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)} \cdot \left[1-\frac{1}{2}\,{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\right]_0^1$$

$$ {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)} \cdot \left[1-\frac{1}{2}\,{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)}\right]$$

(b) Berdasarkan persamaan (4.13) dengan cara yang sama seperti pembuktian bagian (a) maka akan diperoleh sebagai berikut:

$$ {}_{s_i-r}q_{x+r_i}^{(w)} = {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(w)} \cdot \left[1-\frac{1}{2}\,{}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{'(d)}\right] \qquad \blacksquare$$

Hubungan peluang keluar kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar dapat dinyatakan dengan menggunakan persamaan (4.21) dan (4.22) yaitu untuk menentukan peluang pada $[x, x+1]$ maka haruslah $r_i = 0$ dan $s_i = 1$ dari persamaan (4.21) dengan mensubstitusikan nilai r_i dan s_i maka diperoleh sebagai berikut:

$$ {}_{1-0}q_{x+0}^{(d)} = {}_{1-0}q_{x+0}^{'(d)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\,{}_{1-0}q_{x+0}^{'(w)}\right] $$

$$ q_x^{(d)} = q_x^{'(d)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)}\right] $$

$$ q_x^{'(d)} = \frac{q_x^{d}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)}} \tag{4.24} $$

dari persamaan (4.22) dengan mensubstitusikan nilai r_i dan s_i maka diperoleh sebagai berikut:

$$ {}_{1-0}q_{x+0}^{(w)} = {}_{1-0}q_{x+0}^{'(w)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\,{}_{1-0}q_{x+0}^{'(d)}\right] $$

$$ q_x^{(w)} = q_x^{'(w)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} q_x^{'(d)}\right] $$

$$ q_x^{'(w)} = \frac{q_x^{(w)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{'(d)}} \tag{4.25} $$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.25) kepersamaan (4.24) sehingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$ q_x^{'(d)} = \frac{q_x^{(d)}}{1 - \frac{1}{2}\left(\dfrac{q_x^{(w)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{'(d)}}\right)} $$

$$ q_x^{'(d)} = \frac{q_x^{(d)}}{1 - \dfrac{q_x^{(w)}}{2 - q_x^{'(d)}}} $$

$$ q_x^{'(d)} = \frac{q_x^{(d)}}{\dfrac{2 - q_x^{'(d)} - q_x^{(w)}}{2 - q_x^{'(d)}}} $$

$$q_x^{'(d)} = \frac{2q_x^{(d)} - q_x^{(d)} q_x^{'(d)}}{2 - q_x^{'(d)} - q_x^{(w)}}$$

$$q_x^{'(d)}\left(2 - q_x^{'(d)} - q_x^{(w)}\right) = 2q_x^{(d)} - q_x^{'(d)} q_x^{(d)}$$

$$2q_x^{'(d)} - \left(q_x^{'(d)}\right)^2 - q_x^{(w)} q_x^{'(d)} = 2q_x^{(d)} - q_x^{'(d)} q_x^{(d)}$$

$$q_x^{'(d)} - \frac{1}{2}\left(q_x^{'(d)}\right)^2 - \frac{1}{2} q_x^{(w)} q_x^{'(d)} = q_x^{(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} q_x^{(d)}$$

$$q_x^{(d)} - q_x^{'(d)} q_x^{(d)} - q_x^{'(d)} + \frac{1}{2}\left(q_x^{'(d)}\right)^2 + \frac{1}{2} q_x^{'(d)} q_x^{(w)} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(q_x^{'(d)}\right)^2 - \left(q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} q_x^{(w)} + \frac{1}{2} q_x^{'(d)} q_x^{(d)}\right) + q_x^{(d)} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(q_x^{'(d)}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(w)} + \frac{1}{2} q_x^{(d)}\right) q_x^{'(d)} + q_x^{(d)} = 0 \tag{4.26}$$

dengan menggunakan persamaan kuadrat sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$x_{1,2} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.27}$$

berdasarkan persamaan (4.27) diperoleh persamaan seperti berikut:

$$q_x^{'(d)} = b - \sqrt{b^2 - 2 \cdot q_x^{(d)}} \tag{4.28}$$

$$q_x^{'(w)} = c - \sqrt{c^2 - 2 \cdot q_x^{(w)}} \tag{4.29}$$

yang mana $b = 1 - \frac{1}{2} q^{(w)}_{x} + \frac{1}{2} q_x^{(d)}$ dan $c = 1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)} + \frac{1}{2} q_x^{(w)}$ perlu diketahui pada persamaan ini akar positif tidak digunakan karena dapat menyebabkan nilai dari $q_x^{'(d)}$ dan $q_x^{'(w)} > 1$.

Peluang keluar *single decrement* untuk kasus meninggal dunia dan peluang keluar *single decrement* untuk kasus tidak mampu bayar dapat dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 4.3 Jika n_x menyatakan total nasabah yang masuk asuransi, d_x menyatakan jumlah nasabah yang keluar dari perusahaan asuransi karena meninggal dunia dan w_x menyatakan jumlah nasabah yang keluar karena tidak mampu bayar, maka peluang keluar nasabah untuk single decrement selama $[x, x+1]$ berturut-turut adalah

a. $$\hat{q}_x^{'(d)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right)^2 - 2n_x d_x}}{n_x} \tag{4.30}$$

b. $$\hat{q}_x^{'(w)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right)^2 - 2n_x w_x}}{n_x} \tag{4.31}$$

Bukti :

(a) Dengan mensubstitusikan nilai b kepersamaan (4.28) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$q_x^{'(d)} = b - \sqrt{b^2 - 2 \cdot q_x^{(d)}}$$

$$q_x^{'(d)} = \left(1 - \frac{1}{2}q_x^{(w)} + \frac{1}{2}q_x^{(d)}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{(w)} + \frac{1}{2}q_x^{(d)}\right)^2 - 2q_x^{(d)}} \tag{4.32}$$

Persamaan (4.32) merupakan peluang keluar nasabah untuk *single decrement* yang diperoleh dari peluang keluar *double decrement* untuk satu tahun. Dengan mensubstitusikan persamaan (4.9) kepersamaan (4.32) maka diperoleh taksiran peluang keluar *single decrement* untuk kasus meninggal dunia sebagai berikut:

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x}\right)^2 - 2\frac{d_x}{n_x}}$$

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \left(\frac{n_x}{n_x} - \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x}\right) - \sqrt{\left(\frac{n_x}{n_x} - \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x}\right)^2 - 2\frac{d_x}{n_x}}$$

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \frac{1}{n_x}\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right)^2 - 2n_x d_x}$$

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right)^2 - 2n_x d_x}}{n_x}$$

(b) Sama seperti pembuktian (a) yaitu dengan menggunakan persamaan (4.29) dan mensubstitusikan nilai $c = 1 - \frac{1}{2}q_x^{(d)} + \frac{1}{2}q_x^{(w)}$ kepersamaan (4.29) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$q_x^{'(w)} = c - \sqrt{c^2 - 2 \cdot q_x^{(w)}}$$

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \left(1 - \frac{1}{2}q_x^{(d)} + \frac{1}{2}q_x^{(w)}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{(d)} + \frac{1}{2}q_x^{(w)}\right)^2 - 2q_x^{(d)}} \qquad (4.33)$$

Persamaan (4.33) merupakan peluang keluar nasabah untuk *single decrement.* substitusikan persamaan (4.10) kepersamaan (4.33) maka diperoleh taksiran peluang keluar *single decrement* untuk kasus tidak mampu bayar sebagai berikut:

$$\hat{q}_x^{'(w)} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x}\right)^2 - 2\frac{w_x}{n_x}}$$

$$\hat{q}_x^{'(w)} = \left(\frac{n_x}{n_x} - \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x}\right) - \sqrt{\left(\frac{n_x}{n_x} - \frac{1}{2}\frac{d_x}{n_x} + \frac{1}{2}\frac{w_x}{n_x}\right)^2 - 2\frac{w_x}{n_x}}$$

$$\hat{q}_x^{'(w)} = \frac{1}{n_x}\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right)^2 - 2n_x w_x}$$

$$\hat{q}_x^{'(w)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right)^2 - 2n_x w_x}}{n_x} \qquad \blacksquare$$

Dengan serangkaian pembuktian telah diperoleh peluang keluar *single decrement* kasus meninggal dunia dan peluang keluar *single decrement* kasus tidak mampu bayar. Kemudian akan ditentukan peluang keluar *double decrement* melalui hubungan *single decrement* dan *double decrement* dengan menggunakan distribusi uniform.

4.3. Peluang Keluar Nasabah untuk *Double decrement*

Peluang keluar *double decrement* dari kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar dapat ditentukan melalui peluang keluar *single decrement.*

Peluang keluar *single decrement* dalam distribusi uniform sebagaimana dinyatakan dalam persamaan (4.23) dan (4.25). Sedangkan peluang keluar untuk *double decrement* dalam distribusi uniform didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.3 Misalkan $q_x^{(d)}$ peluang keluar *double decrement* karena kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar dinyatakan dengan $q_x^{(w)}$, maka peluang keluar *double decrement* pada interval $[x, x+1]$ dinyatakan sebagai berikut:

a. $$q_x^{'(d)} = \frac{q_x^{(d)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(w)}} \qquad (4.34)$$

b. $$q_x^{'(w)} = \frac{q_x^{(w)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)}} \qquad (4.35)$$

Peluang keluar *double decrement* orang yang berusia x sampai $x+1$ tahun adalah sebagai berikut:

Teorema 4.4 Jika $q_x^{'(d)}$ menyatakan peluang keluar perkasus karena meninggal, $q_x^{'(w)}$ menyatakan peluang keluar perkasus karena tidak mampu bayar, maka peluang keluar *double decrement* orang yang berusia x sampai $x+1$ tahun adalah sebagai berikut:

a. $$q_x^{(d)} = \frac{q_x^{'(d)}\left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)}\right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{'(d)} q_x^{'(w)}} \qquad (4.36)$$

b. $$q_x^{(w)} = \frac{q_x^{'(w)}\left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(d)}\right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{'(d)} q_x^{'(w)}} \qquad (4.37)$$

Bukti:

(a) Persamaan (4.34) dan (4.35) diubah kedalam bentuk berikut:

$$q_x^{(d)} = q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{(w)} \tag{4.38}$$

$$q_x^{(w)} = q_x^{'(w)} - \frac{1}{2} q_x^{(d)} \cdot q_x^{'(w)} \tag{4.39}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.39) kepersamaan (4.38) seperti berikut:

$$q_x^{(d)} = q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \left(q_x^{'(w)} - \frac{1}{2} q_x^{(d)} \cdot q_x^{'(w)} \right)$$

$$q_x^{(d)} = q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} + \frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{(d)} \cdot q_x^{'(w)}$$

$$\frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{d} \cdot q_x^{'(w)} - q_x^{(d)} = -q_x^{'(d)} + \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)}$$

$$-\frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{(d)} \cdot q_x^{'(w)} + q_x^{(d)} = q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)}$$

$$q_x^{(d)} \left(1 - \frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} \right) = q_x^{'(d)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)} \right)$$

$$q_x^{(d)} = \frac{q_x^{'(d)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)} \right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{'(d)} q_x^{'(w)}}$$

(b) sama seperti pembuktian (a) yaitu dengan menggunakan mensubstitusikan persamaan (4.38) kepersamaan (4.39) seperti berikut:

$$q_x^{(w)} = q_x^{'(w)} - \frac{1}{2} \left(q_x^{'(d)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{(w)} \right) q_x^{'(w)}$$

$$q_x^{(w)} = q_x^{'(w)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} + \frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} \cdot q_x^{(w)}$$

$$\frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} \cdot q_x^{(w)} - q_x^{(w)} = -q_x^{'(w)} + \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)}$$

$$-\frac{1}{4} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)} \cdot q_x^{(w)} + q_x^{(w)} = q_x^{'(w)} - \frac{1}{2} q_x^{'(d)} \cdot q_x^{'(w)}$$

$$q_x^{(2)}\left(1-\frac{1}{4}q_x^{'(d)}\cdot q_x^{'(w)}\right)=q_x^{'(w)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^{'(d)}\right)$$

$$q_x^{(w)}=\frac{q_x^{'(w)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^{'(d)}\right)}{1-\frac{1}{4}q_x^{'(d)}q_x^{'(w)}} \qquad \blacksquare$$

Peluang keluar *double decrement* diperoleh dari taksiran peluang keluar *single decrement* sehingga persamaan (4.36) dan (4.37) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$q_x^{(d)}=\frac{\hat{q}_x^{'(d)}\left(1-\frac{1}{2}\hat{q}_x^{'(w)}\right)}{1-\frac{1}{4}\hat{q}_x^{'(d)}\hat{q}_x^{'(w)}} \tag{4.40}$$

$$q_x^{(w)}=\frac{\hat{q}_x^{'(w)}\left(1-\frac{1}{2}\hat{q}_x^{'(d)}\right)}{1-\frac{1}{4}\hat{q}_x^{'(d)}\hat{q}_x^{'(w)}} \tag{4.41}$$

4.4 Kasus *Single decrement* dan *Double decrement*

Misalkan pada suatu perusahaan asuransi terdapat sejumlah orang yang berusia x tahun masuk menjadi nasabah asuransi, dalam waktu lima tahun akan dilihat seberapa besar peluang keluar nasabah setiap tahunnya. Adapun kasus penyebab peluang keluar nasabah dari perusahaan asuransi adalah kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar. Dalam buku (Jordan C W, *Life Contingencies, 1991.*) untuk nasabah yang berusia 24 sampai 29 tahun dan buku (Bowers*, at al, Actuarial Mathematics,* 1986) untuk nasabah yang berusia 65 sampai 70 tahun, diberikan tabel *multiple decrement* untuk dua kasus yaitu kasus 1 dan 2. Pada skripsi ini dimisalkan kasus 1 menyatakan kasus meninggal dunia dan kasus 2 menyatakan kasus tidak mampu bayar. Bentuk data yang diamati adalah bentuk tertutup. Artinya tidak ada penambahan nasabah dari jumlah nasabah awal. Sehingga tabel *multiple decrement* untuk dua kasus dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel dua kasus untuk usia 24-29 tahun dan usia 65-70 tahun

Usia x	n_x	d_x	w_x
24	901.020	299	92.762
25	807.959	314	86.632
26	721.013	324	80.385
27	640.304	329	74.117
28	565.858	329	67.909
29	497.620	324	61.839
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
65	1000	20	50
66	930	28	56
67	846	34	59
68	753	38	60
69	655	39	59
70	557	0	557

Sumber: Buku (Jordan C W, *Life Contingencies, 1991.*) dan buku (Bowers, *at al*, *Actuarial Mathematics*, 1986)

Tabel 4.1 menyatakan bahwa pada usia 24 tahun jumlah orang yang masuk asuransi adalah 901.020 nasabah. Setelah satu tahun berjalan nasabah mencapai usia 25 tahun jumlahnya berkurang menjadi 807.959, karena ada sejumlah 92.762 lagi karena tidak mampu bayar. Berdasarkan tabel 4.1 terlihat bahwa jumlah nasabah terus menurun sampai usia 70 tahun. Hal ini akan dilihat peluang keluar nasabah untuk *single decrement* dan peluang keluar nasabah untuk *double decrement* dari kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar.

Peluang keluar nasabah untuk *single decrement* dari kasus meninggal dunia dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.30). Untuk usia 24 tahun maka peluang keluar nasabah dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{q}_{24}^{'(d)} = \frac{\left(n_{24} - \frac{1}{2}w_{24} + \frac{1}{2}d_{24}\right) - \sqrt{\left(n_{24} - \frac{1}{2}w_{24} + \frac{1}{2}d_{24}\right)^2 - 2n_{24}d_{24}}}{n_{24}}$$

$$\hat{q}_{24}^{'(d)} = \frac{\left(901.020 - \frac{1}{2}92.762 + \frac{1}{2}299\right) - \sqrt{\left(901.020 - \frac{1}{2}92.762 + \frac{1}{2}299\right)^2 - 2(901.020)(299)}}{901.020}$$

$$\hat{q}_{24}^{'(d)} = \frac{(901.020 - 46.381 + 149.5) - \sqrt{(901.020 - 46.381 + 149.5)^2 - 2(269404.98)}}{901.020}$$

$$\hat{q}_{24}^{'(d)} = 0.000349859$$

Peluang keluar nasabah untuk *single decrement* dari kasus tidak mampu bayar dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.31). untuk usia 24 tahun maka peluang keluar nasabah dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{q}_{24}^{'(w)} = \frac{\left(n_{24} - \frac{1}{2}d_{24} + \frac{1}{2}w_{24}\right) - \sqrt{\left(n_{24} - \frac{1}{2}d_{24} + \frac{1}{2}w_{24}\right)^2 - 2n_{24}w_{24}}}{n_{24}}$$

$$\hat{q}_{24}^{'(w)} = \frac{\left(901.020 - \frac{1}{2}299 + \frac{1}{2}92.762\right) - \sqrt{\left(901.020 - \frac{1}{2}299 + \frac{1}{2}92.762\right)^2 - 2(901.020)(92.762)}}{901.020}$$

$$\hat{q}_{24}^{'(w)} = \frac{(901.020 - 149.5 + 46.381) - \sqrt{(901.020 - 149.5 + 46.381)^2 - 2(83580.41724)}}{901.020}$$

$$\hat{q}_{x}^{'(w)} = 0.102970222$$

Dengan cara yang sama menggunakan persamaan (4.30) dan (4.31) maka akan diperoleh peluang keluar nasabah usia 25, 26,27,28,29, dan usia 65,66,…, 70 tahun untuk *single decrement* dari kasus meninggal dunia dan peluang keluar untuk *single decrement* dari kasus tidak mampu bayar seperti pada tabel berikut:

Tabel 4.2 Peluang keluar nasabah untuk *single decrement*

Usia x	$\hat{q}_x^{'(d)}$	$\hat{q}_x^{'(w)}$
24	0.000349859	0.102970222
25	0.000410654	0.107245283
26	0.000475903	0.111515510
27	0.000545392	0.115784404
28	0.000618545	0.120047802
29	0.000694251	0.124312675
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
65	0.020518274	0.050518274
66	0.031057336	0.061164863
67	0.041673191	0.071224019
68	0.052617775	0.081834243
69	0.062445035	0.092979386
70	0	1.000000000

Sumber: Buku (Jordan C W, *Life Contingencies*, *1991*.) dan buku (Bowers, *at al*, *Actuarial Mathematics*, 1986)

Berdasarkan tabel 4.2 terlihat peluang keluar *single decrement* untuk kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar untuk usia nasabah 24 tahun sampai 29 tahun bahwa semakin meningkat usianya maka peluang keluar untuk kasus *single decrementnya* juga semakin besar. Jadi semakin bertambah usia kecendrungan nasabah untuk keluar dari suatu perusahaan asuransi itu semakin besar.

Tabel 4.2 menyatakan peluang keluar nasabah untuk *single decrement*. Sekarang akan dilihat untuk peluang keluar *double decrement*. Setelah memperoleh peluang keluar nasabah untuk *single decrement* maka dapat ditentukan peluang keluar nasabah untuk *double decrement* dari kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar. Peluang keluar nasabah untuk *double decrement* dari kasus meninggal dunia dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.40). Untuk usia 24 tahun maka diperoleh peluang keluar sebagai berikut:

$$q_{24}^{(d)} = \frac{\hat{q}_{24}^{'(d)}\left(1-\frac{1}{2}\hat{q}_{24}^{'(w)}\right)}{1-\frac{1}{4}\hat{q}_{24}^{'(d)}\hat{q}_{24}^{'(w)}}$$

$$q_{24}^{(d)} = \frac{0.000349859\left(1-\frac{1}{2}0.102970222\right)}{1-\frac{1}{4}(0.000349859)(0.102970222)}$$

$$q_{24}^{(d)} = 0.000331849$$

Peluang keluar nasabah untuk *double decrement* dari kasus tidak mampu bayar dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (4.41) untuk usia 24 tahun maka diperoleh peluang keluar sebagai berikut:

$$q_{24}^{(w)} = \frac{\hat{q}_{24}^{'(w)}\left(1-\frac{1}{2}\hat{q}_{24}^{'(d)}\right)}{1-\frac{1}{4}\hat{q}_{24}^{'(d)}\hat{q}_{24}^{'(w)}}$$

$$q_{24}^{(w)} = \frac{0.102970222\left(1-\frac{1}{2}0.000349859\right)}{1-\frac{1}{4}(0.000349859)(0.102970222)}$$

$$q_{24}^{(w)} = 0.000314767$$

Dengan cara yang sama menggunakan persamaan (4.40) dan (4.41) maka akan diperroleh peluang keluar nasabah usia 25, 26, 27, 28, 29 dan 65, 66,…..,70 tahun untuk *double decrement* dari kasus meninggal dunia dan peluang keluar untuk *double decrement* dari kasus tidak mampu bayar seperti pada tabel berikut:

Tabel 4.3 Peluang keluar nasabah untuk *double decrement*

Usia x	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$
24	0.000331849	0.000314767
25	0.000388638	0.000367802
26	0.000449374	0.000424323
27	0.000513827	0.000484087
28	0.000581429	0.000546539
29	0.000651113	0.000610655
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
65	0.020005184	0.019504798
66	0.030121832	0.029214089
67	0.040218969	0.038814487
68	0.050519191	0.048502220
69	0.059628537	0.056935340
70	0	0

Sumber: Buku (Jordan C W, *Life Contingencies*, *1991*.) dan buku (Bowers, *at al*, *Actuarial Mathematics*, 1986)

Berdasarkan tabel 4.3 terlihat peluang keluar *single decrement* untuk kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar untuk usia nasabah 24 tahun samapi 70 tahun bahwa semakin meningkat usianya maka peluang keluar untuk kasus *single decrement* juga semakin besar. Jadi semakin bertambah usia kecenderungan nasabah untuk keluar dari suatu perusahaan asuransi itu semakin besar. Dengan adanya tabel peluang keluar nasabah untuk *single decrement* (tabel 4.2) dan tabel *double decrement* (tabel 4.3) perusahaan asuransi bisa mengantisipasi ketika terjadinya klaim kepada nasabah asuransi.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian sebelumnya tentang peluang keluar nasabah asuransi yang disebabkan oleh dua kasus yaitu kasus meninggal dunia dan kasus tidak mampu bayar dengan menggunakan distribusi uniform dapat disimpulkan bahwa:

1. Berdasarkan persamaan

$$\hat{q}_x^{'(d)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}w_x + \frac{1}{2}d_x\right)^2 - 2n_x d_x}}{n_x}$$

dan

$$\hat{q}_x^{'(w)} = \frac{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right) - \sqrt{\left(n_x - \frac{1}{2}d_x + \frac{1}{2}w_x\right)^2 - 2n_x w_x}}{n_x}$$

Dapat disimpulkan bahwa peluang keluar taksiran *single decrement* kasus meninggal dunia dan tidak mampu bayar akan besar, bila jumlah nasabah yang keluar karena kedua kasus tersebut besar. Peluang keluar taksiran *single decrement* kasus meninggal dunia dan tidak mampu bayar akan kecil, bila jumlah nasabah yang keluar karena kedua kasus tersebut kecil.

2. Berdasarkan persamaan

$$q_x^{(d)} = \frac{\hat{q}_x^{'(d)}\left(1 - \frac{1}{2}\hat{q}_x^{'(w)}\right)}{1 - \frac{1}{4}\hat{q}_x^{'(d)}\hat{q}_x^{'(w)}}$$

dan

$$q_x^{(w)} = \frac{\hat{q}_x^{'(w)}\left(1 - \frac{1}{2}\hat{q}_x^{'(d)}\right)}{1 - \frac{1}{4}\hat{q}_x^{'(d)}\hat{q}_x^{'(w)}}$$

Dapat disimpulan bahwa jika peluang keluar taksiran *single decrement* semakin besar, maka peluang keluar *double decrement* cenderung semakin besar pula, karena peluang keluar *double decrement* diperoleh dari peluang keluar taksiran *single decrement.*

3. Peluang keluar taksiran *single decrement* untuk dua kasus lebih besar dari pada peluang keluar *double decrement*.

5.2 Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang peluang keluar nasabah asuransi pada interval waktu satu tahun untuk kondisi $r_i = 0$ dan $s_i = 1$. Bagi yang berminat pada permasalahan penelitian ini dapat melanjutkan pembahasan tentang peluang keluar nasabah asuransi untuk dua kasus pada kondisi $r_i = 0$ dan $s_i < 1$, dan kondisi $r_i > 0$ dan $s_i = 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N.L. *at al*. "*Actuarial Mathematics*". Schaumhurg: The Society of Actuaries, 1986.

Darwis, S. Kuslan. "*On the Estimation of Double-Decrement Model*". http:/www.google.com, 05 September, pkl 14.^{00}, 2009.

Futami, T. "*Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*". Terjemahan Seiman Hoken Sugaku. Jokan (92 Revision), oleh Gatot Herliyanto, Tokyo: Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Development Center, 1993.

Jordan, C.W. "*Life Contingencies*". Chicago: The Society of Actuaries, 1991.

Bain, L.J., dan M. Engelhardt. "*Introduction to probability and mathematical statistic*". Edisi kedua, California: Duxbury Press An impriant of Wadsworth Publishing Company Belmon, 1991.

London, D. "*Survival Models and Their Estimation*". edisi ketiga, Winsted: Actex Publication, 1997.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Rokan pada tanggal 23 Desember 1986, sebagai anak ke-lima dari enam bersaudara pasangan Bapak Basri dan Ibu Juslinar.

Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal pada Sekolah Dasar Negeri 002 Rokan IV koto pada tahun 1999.

Pada tahun 2002 menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di (SMP N I Rokan IV Koto) dan menamatkan Pendidikan Menengah Atas di SMU Negeri 01 Rokan IV Koto Kabupaten Rokan Hulu (ROHUL) dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) pada tahun 2005. Pada tahun yang sama penulis mengikuti penyelusuran Bibit Unggul Daerah (PBUD) dan diterima sebagai mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri sultan syarif Kasyim Riau pada Jurusan Matematika.

Pada tahun 2008 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Muara Uwai Kecamatan Bangkinang Seberang Kabupaten Kampar. Pada tahun 2009 yang sama penulis melaksanakan Kerja Praktek di Rumah Sakit Umum Daerah Kabupaten Rokan Hulu (Rohul) dengan judul "**Aplikasi Metode Kruskal Wallis Test Dalam Kadar Kortisol Pada Kelahiran Caesar Pada Rumah Sakit Umum Daerah Kabupaten Rokan Hulu**" dibawah bimbingan Ibu Rahmadeni, S.Si dari jurusan dan Ibu Betty Suzianti, Amd, kep. dari Rumah Sakit, tanggal 20 Maret 2009 sampai dengan 20 April 2009 dan diseminarkan pada tanggal 29 Mei 2009.

Dan pada tahun yang sama penulis mengajukan judul proposal tugas akhir dengan judul "**Menaksir Peluang Keluar Peserta Asuransi Menggunakan Distribusi Uniform Dengan Metode Momen**" dibawah bimbingan Ibu Sri Basriati, M.Sc dan diseminarkan pada tanggal 08 Desember 2S009, Alhamdulillah diterima dan dilanjutkan untuk skripsi.