KETERKAITAN ANTARA RUANG HASIL KALI DALAM-2 DAN RUANG BERNORMA-2

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh:

F A R I A N I
10554002375

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

KETERKAITAN ANTARA RUANG HASIL KALI DALAM-2 DAN RUANG BERNORMA-2

F A R I A N I
10554002375

Tanggal Sidang: 04 Februari 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Diberikan $\langle .\,,.\rangle$ merupakan hasil kali dalam dan $\langle .\,,.|.\rangle$ hasil kali dalam-2 sedangkan $\langle X, \langle .\,,.|.\rangle\rangle$ adalah untuk ruang hasil kali dalam-2 serta $\| \, . \, \|$ adalah norma yang didefinisikan dengan $\| \, x \, \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ kemudian untuk ruang bernorma-2 didefinisikan dengan $\langle X, \|.\,,.\|\rangle$. Tujuan dari tugas akhir ini adalah memperkenalkan keterkaitan antara ruang hasil kali dalam-2 dengan ruang bernorma-2 mempunyai suatu hubungan. Berdasarkan pembahasan diperoleh bahwa antara keduanya saling berhubungan dan saling berkaitan.

Kata Kunci: Hasil Kali Dalam, Hasil Kali Dalam-2, Norma, Ruang Bernorma-2, Ruang HasilKali Dalam-2

RELEVANCE BETWEEN 2-INNER PRODUCT SPACE AND 2-NORMED SPACE

F A R I A N I
10554002375

Date of Final Exam:February 04th 2010
Graduation Cremony Priod: July, 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Let $\langle .\,,.\rangle$ *be a Inner Product, and* $\langle .\,,.|\,.\rangle$ *be a 2-Inner Product and whereas* $\langle X,\langle .\,,.|\,.\rangle\rangle$ *be a for 2-Inner Product Space with* $\|\,.\,\|$ *be a norm defined with* $\|\,x\,\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ *then for 2-norma space defined with* $\langle X,\|.\,,.\,\|\rangle$. *. Goal of this peper to determine introduction relevance between 2-Inner Product Space and 2-Normwd Space his have relation. Based of description resulting that between the two of them relation and relevance.*

***Keywords**: Inner Product, Normed, 2-Inner Product, 2-Inner Product Space, 2-Normed Space.*

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Perkembangan ilmu matematika pada saat sekarang ini begitu pesat sehingga memberikan keuntungan dan kemudahan bagi insan pendidikan ataupun bagi dunia usaha, karena matematika merupakan salah satu induk dari segala macam ilmu di dunia. Salah satu perkembangan dari ilmu matematika tersebut yaitu tentang hasil kali dalam. Konsep ruang hasil kali dalam *(inner product space)* sebenarnya telah banyak dibahas dalam ilmu matematika seperti Howard Anton yang membahas tentang ruang hasil kali dalam euclidis, dan D. Amir (1986) yang membahas tentang karakteristik ruang hasil kali dalam kemudian ruang hasil kali dalam tersebut berkembang lagi menjadi ruang hasil kali dalam -2 *(2-inner product space).* Pada tahun 1963 Gahler juga menemukan konsep norma-2 *(2-norm)* dan ruang hasil kali dalam-2, sebagaimana diketahui bahwa konsep ruang hasil kali dalam erat kaitannya dengan norma, sehingga ruang hasil dalam-2 berkaitan juga dengan ruang hasil kali dalam-2.

Masalah ruang hasil kali dalam juga banyak ditulis oleh beberapa ahli matematika didalam sebuah jurnal seperti yang ditulis oleh A. White , Y. J dan S.S, KM (1997) yang membahas tentang karakteristik ruang hasil kali dalam-2. sedangkan di dalam perkuliahan yang dibahas hanya sebatas ruang hasil kali dalam maka berdasarkan jurnal tersebut penulis tertarik untuk mengembangkan jurnal yang ditulis oleh A. White untuk dijadikan sebuah skripsi dengan judul **” Keterkaitan Antara Ruang Hasil Kali Dalam-2 dan Ruang Bernorma-2”.**

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah mengenai keterkaitan antara ruang hasil kali dalan-2 dan ruang bernorma-2.

1.3.1 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini yaitu tentang ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2, serta keterkaitan dari hasil kali dalam dan ruang bernorma-2 itu sendiri.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah membahas mengenai ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2 serta untuk mendapatkan keterkaitan dari ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2.

1.5. Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup 5 bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.

Bab ll Landasan Teori

Bab ini berisikan informasi tentang teori-teori yang digunakan dalam penulisan ataupun metode/teorema yang dipakai.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini berisikan cara-cara atau langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2 .

Bab IV Pembahasan dan Analisa

Bab ini berisikan penyelesaian masalah ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2, serta keterkaitan keduanya.

Bab V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran

BAB II

LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang digunakan dalam skripsi ini adalah :

2.1 Besaran dan Vektor

Besaran yang memiliki nilai dan arah disebut dengan vektor. Contohnya adalah perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya, dan momentum. Sementara itu, besaran yang hanya memiliki nilai tanpa arah disebut dengan skalar. Contohnya adalah massa, muatan, kerapatan, dan temperatur. Untuk notasinya, besaran yang dinyatakan sebagai vektor akan ditandai dengan tanda panah di atas simbolnya ($\vec{A}$, $\vec{B}$ dan seterusnya), sedangkan skalar dinyatakan dengan huruf biasa. Besar (nilai) dari suatu vektor $\vec{A}$ dapat dituliskan $\left|\vec{A}\right|$ atau dengan notasi skalar A

Definisi 2.1. Jika $u = (u_1, u_2, ...u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ...v_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam *Euclidis (Euclidean inner product)* $u.v$ didefinisikan dengan $u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$.

Contoh 2.1

Di berikan hasil kali dalam Euclidis dari vektor u dan v masing-masing adalah $u = (-1\ ,\ 3,\ 5)$ dan $v = (\ 5,\ 4,\ 0\ )$. Tentukan hasil kali dalam Euclidisnya.

Jawab:

Hasil kali dalam Euclidis pada R^3 adalah

$$
\begin{aligned}
u.v &= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n \\
&= (-1)(5) + (3)(4) + (5)(0) \\
&= -5 + 12 + 0 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Maka nilai 7 disebut sebagai hasil kali dalam Euclidis

Definisi 2.2 Dua vektor $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ...v_n)$ pada R^n dinamakan sama jika $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2, ...u_n = v_n$ sedangkan untuk penjumlahan $u + v$ didefinisikan dengan $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ...u_n + v_n)$ dan jika k adalah sebarang skalar, maka perkalian skalar ku didefinisikan dengan $ku = (ku_1, ku_2 , ...ku_n)$. Operasi penambahan dan perkalian skalar dalam definisi ini disebut dengan operasi-operasi baku pada R^n.

Definisi 2.3 Ruang vektor atas lapangan R adalah himpunan tidak kosong X dengan dua operasi yaitu penambahan dan perkalian dengan skalar atas vektor-vektor $x, y, z \in X$ dengan skalar $k, l \in R$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $x + y \in X$
2. $x + y = y + x$ (sifat komunitatif)
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (sifat asosiatif)
4. Ada sebuah vektor $0 \in X$ sehingga $0 + x = x + 0$
5. $\forall$ x di X terdapat vektor balikan dari x atau $-x$ sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$
6. Jika k skalar dan x sebarang benda vektor di X maka kx berada di $kx \in X$
7. $k(x + y) = kx + ky$ (sifat distributif)
8. $(k + l)x = kx + lx$
9. $k(lx) = (kl)(x)$
10. Untuk sebarang real 1 dan untuk setiap $x \in X$ berlaku 1 $x = x$

2.2 Hasil Kali Dalam (*Inner Product*)

Defenisi 2.4 Hasil kali dalam adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasangan vektor di ruang vektor V (misalkan pasangan x, y dan z , dinotasikan dengan $\langle x, y \rangle$ dengan bilangan riil dan memenuhi 4 aksioma , yaitu :

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (aksioma simetris)

2. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ (aksioma penambahan)

3. $\langle kx,y\rangle = k\langle y,x\rangle$ (aksioma kehomogenan)

4. $\langle x,x\rangle \geq 0$ dan $\langle x,x\rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ (aksioma kepositivan)

Ruang vektor yang dilengkapi hasil kali dalam seperti diatas disebut **Ruang hasil kali dalam** yang biasa disingkat dengan RHD**.**

Contoh 2.2

Tunjukkan bahwa operasi perkalian titik titik standar di R^3 Euclides merupakan hasil kali dalam !

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa perkalian titik standar memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam , yaitu :

Misalkan $x = (x_1,\ x_2,\ x_3\ ),\ y = (y_1,\ y_2,\ y_3\ )\ z = (z_1,\ z_2,\ z_3\ )$ maka $x, y, z \in R^3$

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= (x \cdot y)\\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\\ &= (y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3)\\ &= \langle y,x\rangle \qquad \text{(Aksioma Simetris)}\end{aligned}$$

2. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x+y,z\rangle &= ((x+y)\cdot z)\\ &= ((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\cdot(z_1,z_2,z_3))\\ &= ((x_1z_1+y_1z_1)+(x_2z_2+y_2z_2)+(x_3z_3+y_3z_3))\\ &= (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\ &= (x\cdot z)+(y.z)\\ &= \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \qquad \text{(Aksioma Penambahan)}\end{aligned}$$

3. $\langle kx, y\rangle \quad = k\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle kx, y\rangle &= k(x \cdot y) \\
&= (kx_1y_1 + kx_2y_2 + kx_3y_3) \\
&= k(x \cdot y) \\
&= k\langle x, y\rangle \qquad \text{(Aksioma Kehomogenan)}
\end{aligned}$$

4. $\langle x, x\rangle \quad \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= (x \cdot x) \\
&= (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2) \geq 0 \\
\langle x, x\rangle &= 0 \\
&= (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_{31}{}^2) = 0, \leftrightarrow \; x = (0,0,0) = 0 \quad \text{(Aksioma Kepositivan)}
\end{aligned}$$

2.3 Ruang Bernorma *(Norm Space)*

Definisi 2.5 Jika X adalah ruang linear atas lapangan R adalah fungsi bernilai real dan $\|.\|$ dikatakan norma pada X jika memenuhi 4 aksioma berikut :

1. $\|x\| \geq 0$ untuk senua $x \in X$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan $\alpha \in R$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga)

Pasangan $(X; \|\cdot\|)$ disebut dengan ruang linear bernorma dengan norma $\|\cdot\|$

Contoh 2.3

Misalkan X ruang linear atas lapangan R dengan mendefinisikan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ akan dibuktikan bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ adalah norma dengan $x = (x_1, x_2)$ dimana $x \in X$.

Jawab:

1. $\|x\| \geq 0$

Misalkan X ruang linear atas lapangan R ambil sebarang $x \in X$ dan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ dimana $|x_1, x_2| \geq 0$ sehingga $|x_1| + |x_2| \geq 0$ dengan kata lain $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Terlebih dahulu kita harus membuktikan bahwa $\|x\| = 0$ maka haruslah $x = 0$

Misalakan X ruang linear pada lapangan R dengan diketahui bahwa $\|x\| = 0$ sehingga $\|x\| = |x_1| + |x_2| = 0, \ \forall \ x \in X$ dimana $|x_1, x_2| \geq 0$ sehingga untuk $|x_1| + |x_2| = 0,$ haruslah nilai $x_1 = x_2 = 0$ dengan kata lain nilai dari $x = 0$

selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = 0$ jika $x = 0$

$$\|x\| = 0$$
$$\|x\| = |x_1| + |x_2| = |0| + |0| = 0, \qquad \leftrightarrow \ x = 0$$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$
$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| \\ &= |\alpha| |x_1| + |\alpha| |x_2|| \\ &= |\alpha| (|x_1| + |x_2|) \\ &= |\alpha| \|x\|| \end{aligned}$$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ambil sebarang nilai $y \in X$ dengan $y = (y_1, y_2)$ sehingga

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y \ \ | \\ &= |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Karena keempat aksioma di atas terpenuhi maka $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupak suatu norma pada ruang linear X atas lapangan R .

Definisi 2.6 Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam , maka ***norma*** ***(*** panjang) vektor x dinyatakan oleh $\| x \|$ dan didefinisikan oleh $\| x \| = \langle x , x \rangle^{1/2}$. Jika panjang berada pada R^2 maka $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ sedangkan pada R^3 maka $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Definisi 2.7 Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam , maka jarak antara dua titik vektor u dan v dinyatakan oleh $d(u,v)$ dan didefinisikan oleh $d(u,v) = \| u - v \|$ jika jarak antara dua titik di R^2 maka $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ dan diberikan $d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = \| u - v \|$ sedangkan jika jarak antara dua titik di R^3 maka $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ dan diberikan oleh $d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} = \| u - v \|$

Definisi 2.8 Ruang linier X adalah suatu himpunan yang memiliki anggota vektor dan skalar pada lapangan *(field)* K dengan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi sifat Distributif dan Assosiatif sebagai berikut :

1. Sifat Distributif $F(x + y) = F(x) + F(y)$
2. Sifat Assosiatif $F(kx) = kF(x)$.

Contoh 2.4 Misalkan $F : R^2 \to R^3$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $F(u,v) = (x, x + y, x - y)$ dan jika $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$ maka $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Tunjukkan bahwa F adalah sebuah ruang linier.

Jawab :

Diketahui $F : R^2 \to R^3$ dan $F(x, y) = (x, x + y, x - y)$ kemudian diberikan $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$ sehingga didapat $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Akan ditunjukkan bahwa F adalah sebuah ruang linier.

$$
\begin{aligned}
F(u+v) &= F(u)+F(v) \\
&= [x_1+x_2,(x_1+x_2)+(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(v_1+v_2)] \\
&= (x_1,x_1+y_1,x_1-y_1)+(x_2,x_2+y_2,x_2-y_2) \\
&= F(u)+F(v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(ku) &= kF(u) \\
&= (kx_1,kx_1+ky_1,kx_1-ky_1) \\
&= k(x_1,x_1+y_1,x_1-y_1) \\
&= kF(u)
\end{aligned}
$$

Karena kedua aksioma diatas terpenuhi maka terbukti bahwa F adalah sebuah ruang linier.

Definisi 2.9 Himpunan S dengan dua vektor atau lebih adalah

1. Tak bebas linier jika dan hanya jika paling tidak satu diantara vektor S dintaykan sebagai kombinasi linier dari vektor S lainnya .
2. Bebas linier jika dan hany jika tidak ada vektor S yang dapat dinyatrakan sebagai kombinasi linier dalam vektor S lainnya.

Teorema 2.1 jika x dan y adalah vektor pada sebuah ruang hasil kali dalam maka $|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$ (Ketaksamaan Cauchy Schwarz).

Bukti :

Jika $x=0$ atau $y=0$ maka ketaksamaan Cauchy diatas terpenuhi, dan jika $x \ne 0$, $y \ne 0$, misalkan $(x,x)=a$,$2(x,y)=b$, $(y,y)=c$ dan $t \in R$. Dengan menggunakan aksioma kepositifan hasil kali dalam dari ketaksamaan cauchy di atas dimana sebarang vektor itu sendiri tidak negatif sehingga

$$
\begin{aligned}
0 &\le (tx+y,\ tx\ \ y) \\
&= ((tx+y)\cdot(tx+y)) \\
&= (x,x)t^2+2(x,y)t+(y,y)t \\
&= at^2+bt+c
\end{aligned}
$$

Ketaksamaan Cauchy diatas menunjukan bahwa $at^2 + bt + c$ yang tidak mempunyai akar real sehingga harus menggunakan deskriminasi yang memenuhi sifat $b^2 - 4ac \leq 0$ maka

$$(2(x,y))^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$$

$$4(x,y)^2 \quad - 4(x,x)(y,y)$$

$$(x,y)^2 \quad \leq (x,x)(y,y)$$

$$(x,y)^2 \quad \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$(x,y) \quad \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \blacksquare$$

Proposisi. Diberikan X ruang linear bernorm dengan sebuah hasil kali dalam $\langle \; .,. \;|. \; \rangle$ maka $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ untuk $x \in X$ adalah norma pada X .

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $\|x\|$ memenuhi sifat dari norma berikut :

1. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

   $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$ karena jika $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ adalah bilangan real maka $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ harusla bernilai positif. $\blacksquare$

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

   Akan ditunjukan dari kanan dan dari kiri maka :

   $\Rightarrow$ Misalkan $\|x\| = 0$ yaitu $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = 0$ dari teorema 2.1 maka $x = 0$

   $\Leftarrow$ Untuk $x = 0$ akan ditunjukkan $\|x\| = 0$

   $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle 0,0 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \blacksquare$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ untuk setiap $x \in X$ dan α adalah skalar

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$
$$= \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= \alpha^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= |\alpha| \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= |\alpha|\|x\| \qquad \blacksquare$$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$
$$= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$
$$= \left\langle \|x\|^2 + \|y\|^2 \right\rangle \qquad \blacksquare$$

Dari ketidaksaam Cauchy Schwarz sehingga $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ karena $\|x\|$ memenhui aksioma dari ruang norma maka $\|x\|$ adalah norma pada X .

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodelogi yang penulis pakai pada skripsi ini adalah metodologi studi literatur terhadap referensi-referensi yang berhubungan dengan aljabar linier elementer, teori ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2 yaitu dengan langkah-langkah :

1. Memahami definisi dari hasil kali dalam, dan kemudian memberikan contoh dari hasil kali dalam tersebut.
2. Memahami definisi dari ruang bernorma , dan kemudian memeberikan contoh dari ruang bernorma tersebut.
3. Memahami definisi dari ruang hasil kali dalam-2.

   Dengan tujuan memudahkan dalam menentukan dan mencari keterkaitan antara ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2.

4 Memahami definisi dari ruang bernorma-2.

5 Mencari keterkaitan antara ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma-2. yang merupakan hasil yang akan dicapai dalam penulisan tugas akhir ini.

6 Mengambil kesimpulan

BAB IV

KETERKAITAN ANTARA RUANG HASIL KALI DALAM-2 DAN RUANG BERNORMA-2

Berdasarkan landasan teori mengenai konsep ruang vektor, ruang hasil kali dalam , ruang bernorma dan norma pada ruang hasil kali dalam. Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep ruang hasil kali dalam-2 , ruang bernorma serta sifat-sifat ruang hasil kali dalm-2 dan ruang bernorma -2.

4.1 Ruang Hasil Kali Dalam-2.

Konsep ruang hasil kali dalam-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada tahun 1965 dan kemudian pada tahun 1995 konsep ruang hasil kali dalam-2 tersebut diperkenalkan lagi oleh White et Al .

Definisi 4.1 Diberikan X ruang linear yang berdimensi besar dari satu dan $\langle .,. | . \rangle$ adalah fungsi nilai real pada $X \times X \times X$, yang memenuhi sifat berikut :

1. $\langle x, x | z \rangle \geq 0$, $\langle x, x | z \rangle = 0 \Leftrightarrow$ x dan z adalah tak bebas linear
2. $\langle x, x | z \rangle = \langle z, z | x \rangle$
3. $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle$
4. $\langle \alpha x, y | z \rangle = \alpha \langle x, y | z \rangle$ $\forall$ α bilangan real
5. $\langle x + x', y | z \rangle = \langle x, y | z \rangle + \langle x', y | z \rangle$

$\langle .,. | . \rangle$ disebut hasil kali dalam-2 sedangkan untuk ruang hasil kali dalam-2 disimbolkan dengan $\langle X, \langle .,. | . \rangle \rangle$.

Contoh soal 4.1

Diberikan X ruang linier atas lapangan R^2 dengan hasil kali dalam-2 $\langle x, y|z\rangle$, akan ditunjukkan bahwa $\langle x, y|z\rangle$ adalah hasil kali dalam-2 pada X .

Jawab :

Diketahui X ruang linier dan hasil kali dalam-2 $\langle x, y|z\rangle$, sehingga akan ditunjukkan bahwa $\langle x, y|z\rangle$ adalah hasil kali dalam-2 pada X . Untuk menjawab soal diatas kita harus mendefinisikan dulu bahwa $\langle x, y|z\rangle = \langle x_1 y_1|z_1 - x_2 y_2|z_2\rangle$ dengan, $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dengan $x, y, z \in X$.

1. $\langle x, x|z\rangle \geq 0$

Misalkan X ruang linier atas lapangan R kemudian ambil sebarang nilai $x \in X$ sehingga $\langle x, x|z\rangle == \langle x_1{}^2|z_1 - x_2{}^2|z_2\rangle$ karena nilai $x \in X$ dan didapat $x_i{}^2 \geq 0, \forall i = 1, 2, 3...n$ sehingga didapat $\left\langle x_1{}^2|z_1 - x_2{}^2\right|z_2\right\rangle \geq 0$ dengan kata lain $\langle x, x|z\rangle \geq 0$. ■

Untuk $\langle x, x|z\rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan z tak bebas linier.

$\Rightarrow$ $\langle x, x|z\rangle = 0$ akan ditunjukkan x dan z tak bebas linier. Disini misalkan lagi $\langle x, x|z\rangle = \langle x_1{}^2 z_2 - x_2{}^2 z_1\rangle$ sehingga $\langle x, x|z\rangle = \langle x_1{}^2 z_2 - x_2{}^2 z_1\rangle = 0$ maka $x_1{}^2 z_2 - x_2{}^2 z_1 = 0,\ x_1{}^2 z_2 = x_2{}^2 z_1$, $\frac{x_1{}^2}{x_2{}^2} = \frac{z_1}{z_2}$ sehingga didapat $x_1{}^2 = \frac{x_2{}^2}{z_2} z_1$ sedangkan untuk $x_2{}^2 = \frac{x_1{}^2}{z_1} z_2$ misalkan $\frac{x_1{}^2}{x_2{}^2} = \frac{z_1}{z_2} = \beta$ sehungga didapat $x_1{}^2 = \beta z_1,\ x_2{}^2 z_2$ hal ini menunjukkan bahwa x dan z tak bebas linier. ■

$\Leftarrow$ x dan z tak bebas linier akan ditunjukkan $\langle x, x | z \rangle = 0$ misalkan $x = (x_1^{\,2}, x_2^{\,2})$ dan $z = (z_1, z_2)$ secara sistematis dapat ditulis dengan $x = \beta\, z$, $x = (x_1^{\,2}, x_2^{\,2}) = \beta\ (z_1 z_2)$ maka $\beta = \dfrac{x_1^{\,2}}{z_1} = \dfrac{x_2^{\,2}}{z_2}$ dengan mensubsitusikan persamaan tersebut sehingga didapat $x_1^{\,2} z_2 = x_2^{\,2} z_1$ maka $x_1^{\,2} z_2 - x_2^{\,2} z_1 = 0$ hal ini menunjukkan bahwa $\langle x, x | z \rangle = 0$ ■

2. $\langle x, x | z \rangle = \langle z, z | x \rangle$

$$\langle x, x | z \rangle = \langle .x_1 | z - x_2 | z \rangle$$
$$= \langle .z_1 | x - z_2 | x \rangle$$
$$= \langle z, z | x \rangle$$
$$= \langle z, z | x \rangle \quad ■$$

3. $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle$

$$\langle x, y | z \rangle = \langle x_1 y_1 | z_1 - x_2 y_2 | z_2 \rangle$$
$$= \langle y_1 x_1 | z_1 - y_2 x_2 | z_2 \rangle$$
$$= \langle y, x | z \rangle \quad ■$$

4. $\langle \alpha x, y | z \rangle = \alpha \langle x, y | z \rangle$

$$\langle \alpha x, y | z \rangle = \langle \alpha x_1 y_1 | z_1 - \alpha x_1 y_1 | z_1 \rangle$$
$$= \alpha \langle x_1 y_1 | z_1 - x_1 y_1 | z_1 \rangle$$
$$= \alpha \langle x, y | z \rangle \quad ■$$

5. $\langle x + x^1, y | z \rangle = \langle x, y | z \rangle + \langle x^1, y | z \rangle$

$$\langle x + x^1, y | z \rangle = \langle \langle x_1 + x_1^{\,1} | \rangle, y_1 | z_1 - \langle x_2 + x_2^{\,1} | \rangle y_2 | z_2 \rangle$$

$$\langle x + x^1, y | z \rangle = \langle \langle x_1 y_1 | z_1 + x_1^{\,1} y_1 | z_1 \rangle - \langle x_2 y_2 | z_2 + x_2^{\,1} y_2 | z_2 \rangle \rangle$$
$$= \langle x_1 y_1 | z_1 - x_2 y_2 | z_2 \rangle + \langle x_1^{\,1} y_1 | z_1 - x_2^{\,1} y_2 | z_2 \rangle$$

$$= \langle x, y | z \rangle + \langle x^1, y | z \rangle \quad ■$$

Berdasarka aksioma 1, 2, 3, 4, 5 dan kelima aksoima tersebut terpenuhi maka $\langle x, y|z\rangle$ adalah hasil kali dalam-2 pada X .

4.2 Sifar-Sifat Dasar Hasil Kali Dalam-2.

Selanjutnya White et al memberikan beberapa sifat dasar tentang ruang hasil kali dalam-2 yaitu :

1. Untuk setiap $x, y, z \in X$, $|\langle x, y|z\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x|z\rangle}\sqrt{\langle x, x|z\rangle}$
2. Untuk setiap $x, y, \in X$, $\langle x, y|y\rangle = 0$
3. Untuk setiap $x, y, z \in X$, dan $\alpha \in R$ maka $\langle x, y|\alpha z\rangle = \alpha^2\langle x, y|z\rangle$
4. Untuk setiap $x, y, z, w \in R$ maka

   $$\langle x, y|z+w\rangle = \langle x, y|z\rangle + \langle x, y|w\rangle + \frac{1}{2}\left[\langle z, w|x+y\rangle - \langle z, w|x-y\rangle\right]$$

5. Jika $\langle X, (.|.)\rangle$ adalah ruang hasil kali dalam maka hasil kali dalam-2 $\langle .,.|.\rangle$ didefinisikan pada X maka

   $$\langle\langle x, y|z\rangle\rangle = \begin{vmatrix} \langle x|y\rangle & \langle x|z\rangle \\ \langle y|z\rangle & \langle z|z\rangle \end{vmatrix} = \langle x|y\rangle\|z\|^2 - \langle x|z\rangle\langle y|z\rangle$$

4.3 Ruang Bernorma-2.

Definisi 4.2 Diberikan X ruang linear yang berdimensi besar dari satu dan $(.,.\ |.)$ adalah fungsi nilai real pada $X \times X$, yang memenuhi sifat berikut :

1. $\|x, y\| = 0$, jika dan hanya jika x dan y tak bebas linear
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$
3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|y, x\|$, untuk semua $\alpha \in R$
4. $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

$\|.,.\|$ disebut norma-2 pada X , dan ($X, \|.,.\|$) disebut ruang bernorma-2.

4.4 Sifat-Sifat Dasar Ruang Bernorma-2.

Dalam ruang bernorma White et Al juga memberikan sifat-sifat dasar dari ruang bernorma-2 yaitu :

1. pada sebarang hasil kali dalam-2 $\langle X, \langle .,. | . \rangle \rangle$ sedangkan $\|x, y\| = \sqrt{\langle x, x|y \rangle}$ didefinisikan sebagai norma-2 dengan $\langle x, y|z \rangle = \dfrac{\|x+y, z\|^2 - \|x-y, z\|^2}{4}$ dan $\|x+y, z\|^2 + \|x-y, z\|^2 = 2\left\langle \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 \right\rangle$.

2. Misalkan $\langle X, \langle .,. | . \rangle \rangle$ adalah ruang linier bernorma-2 dengan kondisi $\|x+y, z\|^2 + \|x-y, z\|^2 = 2\left\langle \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 \right\rangle$ yang memenuhi setiap $x, y, z \in X$, maka hasil kali dalam-2 pada X didefinisikan dengan $\langle x, y|z \rangle = \dfrac{\|x+y, z\|^2 - \|x-y, z\|^2}{4}$.

Contoh 4.2

Diberikan $x = R^2$ dengan norma-2 $\|x, y\|$ adalah luas yang dibagun oleh vektor x dan y. Maka $\|x, y\|$ merupakan norma-2 pada $x = R^2$.

Jawab:

Diketahui $x = R^2$ dengan norma-2 ,dan $\|x, y\|$ luas yang dibagun oleh vektor x dan y, akan ditunjukkan bahwa $\|x, y\|$ adalah norma-2 pada $x = R^2$. Untuk menjawab soal didefinisikan dahulu bahwa $\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ dengan $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ dan $y = \langle y_1, y_2 \rangle$ maka

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y tak bebas linier.

$\Rightarrow$ $\|x,y\| = 0$ akan ditunjukkan x, dan y tak bebas linier . karena $\|x,y\| =$ $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ maka

$\|x,y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| = 0$, $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, $x_1 y_2 = x_2 y_1$, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

sehingga didapat $x_1 = \frac{x_2}{y_2} y_1$ sedangkan untuk $x_2 = \frac{x_1}{y_1} y_2$ kemudian misalkan $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \alpha$ sehingga didapat $x_1 = \alpha y_1$ dan $x_2 = \alpha y_2$, hal ini menunjukkan bahwa x dan y tak bebas linier.

$\Leftarrow$ x dan y adalah tak bebas linier akan ditunjukkan bahwa $\|x,y\| = 0$

x dan y adalah tak bebas linier artinya x merupaakan kelipatan y atau sama dengan y dan sebaliknya, dan misalkan $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ dan $y = \langle y_1, y_2 \rangle$ maka secara sistematis dapat ditulis $x = \alpha y$, $x = \langle x_1, x_2 \rangle = \alpha \langle y_1, y_2 \rangle$ sehingga $x_1 = \alpha y_1$ dan $x_2 = \alpha y_2$ maka $\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ dengan mensubsitusikan persamaan tersebut maka $x_1 y_{21} = x_2 y_1$ maka $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$. Hal ini menunjukkan bahwa $\|x,y\| = 0$

2. $\|x,y\| = \|y,x\|$ $\forall\, x, y \in X$

$$
\begin{aligned}
\|x,y\| &= |x_1 y_2 - x_2 y_1| \\
&= |x_2 y_1 - x_1 y_2| \\
&= |y_1 x_2 - y_2 x_1| \\
&= \|y,x\| \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|y, x\| \quad \forall\ x, y \in X$ dan α sebarang vektor

$$\|\alpha x, y\| = |\alpha x_1 y_2 - \alpha x_2 y_1|$$
$$= |\alpha \langle x_2 y_1 - x_1 y_2 \rangle|$$
$$= |\alpha| |y_2 x_1 - y_1 x_2|$$
$$= |\alpha| \|x, y\| \qquad \blacksquare$$

4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\| \quad \forall\ x, y \in X$

$$\|x, y + z\| = |x_1 \langle y_2 + z_2 \rangle - x_2 \langle y_1 + z_1 \rangle|$$
$$= |x_1 y_2 + x_1 z_2 - x_2 y_1 - x_2 z_1|$$
$$= |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 z_2 - x_2 z_1|$$
$$\leq |x_1 y_2 - x_2 y_1| + |x_1 z_2 - x_2 z_1|$$
$$= \|x, y\| + \|x, z\| \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan sifat 1, 2, 3, dan 4 kemudian semua sifat tersebut terpenuhi maka $\|x, y\|$ adalah norma-2 pada X .

LEMMA 4.1 Di dalam ruang hasil kali dalam-2 *(2-inner product space)* terdapat

1. $\|x + y, y + z\|^2 = \sum \ + 2\langle x, y|z \rangle - 2\langle x, z|y \rangle + 2\langle y, z|x \rangle$
2. $\|x + y, y - z\|^2 = \sum \ + 2\langle x, y|z \rangle + 2\langle x, z|y \rangle - 2\langle y, z|x \rangle$
3. $\|x - y, y + z\|^2 = \sum \ - 2\langle x, y|z \rangle + 2\langle x, z|y \rangle + 2\langle y, z|x \rangle$
4. $\|x - y, y - z\|^2 = \sum \ - 2\langle x, y|z \rangle - 2\langle x, z|y \rangle - 2\langle y, z|x \rangle$

Dengan

$$\sum \quad = \|x, y\|^2 + \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$$
$$\langle z, y|y \rangle \quad = 0$$
$$\|y, y\|^2 \quad = 0$$
$$\langle x, y|y + z \rangle = [\langle x, y|z \rangle - \langle x, z|y \rangle]$$
$$\langle x, y|y - z \rangle = [\langle x, y|z \rangle + \langle x, z|y \rangle]$$

Bukti :

1. $\|x + y, y + z\|^2 = \sum \ + 2\langle x, y|z \rangle - 2\langle x, z|y \rangle + 2\langle y, z|x \rangle$

$$
\begin{aligned}
\|x+y,y+z\|^2 &= \langle x+y,x+y|y+z\rangle \\
&= \langle x,x+y|y+z\rangle + \langle y,x+y|y+z\rangle \\
&= \langle x,x|y+z\rangle + \langle y,x|y+z\rangle + \langle x,y|y+z\rangle + \langle y,y|y+z\rangle \\
&= \langle y+z,y+z|x\rangle + \langle y,x|y+z\rangle + \langle y,x|y+z\rangle + \langle y+z,y+z|y\rangle \\
&= \langle y+z,y+z|x\rangle + 2\langle x,y|y+z\rangle + \langle y+z,y+z|y\rangle \\
&= \langle y,y+z|x\rangle + \langle z,y+z|x\rangle + 2\langle x,y|y+z\rangle + \langle y,y+z|y\rangle + \langle z,y+z|y\rangle \\
&= \langle y,y|x\rangle + \langle y,z|x\rangle + \langle z,z|x\rangle + \langle z,y|x\rangle + 2\langle x,y|y+z\rangle \\
&\quad + \langle y,y|y\rangle + \langle y,z|y\rangle + \langle z,y|y\rangle + \langle z,z|y\rangle \\
&= \|y,x\|^2 + \langle y,z|x\rangle + \|z,x\|^2 + \langle z,y|x\rangle + 2\langle x,y|y+z\rangle + \|y.y\|^2 + 2\langle y,z|y\rangle + \|z,y\|^2 \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + \|y.y\|^2 + 2\langle y,z|x\rangle + 2\langle x,y|y+z\rangle + 2\langle y,z|y\rangle \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + 0 + 2\langle y,z|x\rangle + 2\big[\langle x,y|z\rangle - \langle x,z|y\rangle\big] + 2\cdot 0 \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + 2\langle y,z|x\rangle + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle \\
&= \sum \quad + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle \\
\|x+y,y+z\|^2 &= \sum \quad + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2. $\|x+y,y-z\|^2 = \sum \quad + 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle$

$$
\begin{aligned}
\|x+y,y-z\|^2 &= \langle x+y,x+y|y-z\rangle \\
&= \langle x,x+y|y-z\rangle + \langle y,x+y|y-z\rangle \\
&= \langle x,x|y-z\rangle + \langle y,x|y-z\rangle + \langle x,y|y-z\rangle + \langle y,y|y-z\rangle \\
&= \langle y-z,y-z|x\rangle + 2\langle x,y|y-z\rangle + \langle y-z,y-z|y\rangle \\
&= \langle y,y-z|x\rangle - \langle z,y-z|x\rangle + 2\langle x,y|y-z\rangle + \langle y,y-z|y\rangle + \langle z,y-z|y\rangle \\
&= \langle y,y|x\rangle - \langle y,z|x\rangle + \langle z,z|x\rangle - \langle z,y|x\rangle + 2\langle x,y|y-z\rangle \\
&\quad + \langle y,y|y\rangle - \langle y,z|y\rangle - \langle z,y|y\rangle + \langle z,z|y\rangle \\
&= \|y,x\|^2 - \langle y,z|x\rangle + \|z,x\|^2 - \langle z,y|x\rangle + 2\langle x,y|y-z\rangle + \|y.y\|^2 - 2\langle y,z|y\rangle + \|z,y\|^2 \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + \|y.y\|^2 + 2\langle y,z|x\rangle + 2\langle x,y|y-z\rangle - 2\langle y,z|y\rangle \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + 0 - 2\langle y,z|x\rangle + 2\big[\langle x,y|z\rangle + \langle x,z|y\rangle\big] + 2\cdot 0 \\
&= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 - 2\langle y,z|x\rangle + 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle \\
\|x+y,y+z\|^2 &= \sum \quad + 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3. $\|x-y,y+z\|^2=\sum \quad -2\langle x,y|z\rangle+2\langle x,z|y\rangle+2\langle y,z|x\rangle$

$$\begin{aligned}
\|x-y,y+z\|^2 &= \langle x-y,x-y|y+z\rangle \\
&= \langle x,x-y|y+z\rangle-\langle y,x-y|y+z\rangle \\
&= \langle x,x|y+z\rangle-\langle y,x|y+z\rangle-\langle x,y|y+z\rangle+\langle y,y|y+z\rangle \\
&= \langle y+z,y+z|x\rangle-2\langle x,y|y+z\rangle+\langle y+z,y+z|y\rangle \\
&= \langle y,y+z|x\rangle+\langle z,y-z|x\rangle-2\langle x,y|y+z\rangle+\langle y,y+z|y\rangle+\langle z,y+z|y\rangle \\
&= \langle y,y|x\rangle+\langle y,z|x\rangle+\langle z,z|x\rangle+\langle z,y|x\rangle-2\langle x,y|y+z\rangle \\
&\quad +\langle y,y|y\rangle+\langle y,z|y\rangle+\langle z,y|y\rangle+\langle z,z|y\rangle \\
&= \|x,y\|^2+2\langle y,z|x\rangle+\|x,z\|^2-2\langle x,y|y+z\rangle+\|y.y\|^2+2\langle y,z|y\rangle+\|y,z\|^2 \\
&= \|x,y\|^2+\|x,z\|^2+\|y,z\|^2+\|y.y\|^2+2\langle y,z|x\rangle-2\langle x,y|y+z\rangle+2\langle y,z|y\rangle \\
&= \|x,y\|^2+\|x,z\|^2+\|y,z\|^2+0+2\langle y,z|x\rangle-2\big[\langle x,y|z\rangle-\langle x,z|y\rangle\big]+2\cdot 0 \\
&= \|x,y\|^2+\|x,z\|^2+\|y,z\|^2+2\langle y,z|x\rangle-2\langle x,y|z\rangle+2\langle x,z|y\rangle \\
&= \sum \quad -2\langle x,y|z\rangle+2\langle x,z|y\rangle+2\langle y,z|x\rangle
\end{aligned}$$

$$\|x+y,y+z\|^2=\sum \quad -2\langle x,y|z\rangle+2\langle x,z|y\rangle+2\langle y,z|x\rangle \qquad \blacksquare$$

4. $\|x-y,y-z\|^2=\sum \quad -2\langle x,y|z\rangle-2\langle x,z|y\rangle-2\langle y,z|x\rangle$

$$\begin{aligned}
\|x-y,y+z\|^2 &= \langle x-y,x-y|y-z\rangle \\
&= \langle x,x-y|y-z\rangle-\langle y,x-y|y-z\rangle \\
&= \langle x,x|y-z\rangle-\langle y,x|y-z\rangle-\langle x,y|y-z\rangle+\langle y,y|y-z\rangle \\
&= \langle y-z,y-z|x\rangle-2\langle x,y|y-z\rangle+\langle y-z,y-z|y\rangle \\
&= \langle y,y-z|x\rangle-\langle z,y-z|x\rangle-2\langle x,y|y-z\rangle+\langle y,y-z|y\rangle+\langle z,y-z|y\rangle \\
&= \langle y,y|x\rangle-\langle y,z|x\rangle+\langle z,z|x\rangle-\langle z,y|x\rangle-2\langle x,y|y-z\rangle \\
&\quad +\langle y,y|y\rangle-\langle y,z|y\rangle-\langle z,y|y\rangle+\langle z,z|y\rangle
\end{aligned}$$

$$= \|x,y\|^2 - 2\langle y,z|x\rangle + \|x,z\|^2 - 2\langle x,y|y-z\rangle + \|y.y\|^2 - 2\langle y,z|y\rangle + \|y,z\|^2$$
$$= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + \|y.y\|^2 - 2\langle y,z|x\rangle - 2\langle x,y|y-z\rangle - 2\langle y,z|y\rangle$$
$$= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 + 0 - 2\langle y,z|x\rangle - 2[\langle x,y|z\rangle + \langle x,z|y\rangle] - 2\cdot 0$$
$$= \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 - 2\langle y,z|x\rangle - 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle$$
$$= \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle$$
$$\|x+y,y+z\|^2 = \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.1 Ruang linier bernorma-2 (*linear 2-normed space*) $\langle X, \| .,. \| \rangle$ adalah hasil kali dalam-2 *(2-inner product space)* jika dan hanya jika $4\sum = \|x+y,y+z\|^2 + \|x+y,y-z\|^2 + \|x-y,y+z\|^2 + \|x-y,y-z\|^2$ adalah benar

Bukti :

Diketahui Ruang linier bernorma-2 $\langle X, \| .,. \| \rangle$ adalah hasil kali dalam-2 akan ditunjukkan bahwa

$4\sum = \|x+y,y+z\|^2 + \|x+y,y-z\|^2 + \|x-y,y+z\|^2 + \|x-y,y-z\|^2$ adalah benar

Berdasarkan lemma 4.1 sehingga diperoleh

$$\|x+y,y+z\|^2 = \sum \; + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle +$$
$$\|x+y,y-z\|^2 = \sum \; + 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle +$$
$$\|x-y,y+z\|^2 = \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle +$$
$$\|x-y,y-z\|^2 = \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle +$$

$$\|x+y,y+z\|^2 + \|x+y,y-z\|^2 + \|x-y,y+z\|^2 + \|x-y,y-z\|^2 =$$
$$\sum \; + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle + \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle +$$
$$\sum \; - 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle + \sum \; - 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle =$$

$$\|x+y, y+z\|^2 + \|x+y, y-z\|^2 + \|x-y, y+z\|^2 + \|x-y, y-z\|^2 = \sum + \sum + \sum + \sum$$
$$\|x+y, y+z\|^2 + \|x+y, y-z\|^2 + \|x-y, y+z\|^2 + \|x-y, y-z\|^2 = 4\sum$$

Jadi terbukti bahwa

$$4\sum = \|x+y, y+z\|^2 + \|x+y, y-z\|^2 + \|x-y, y+z\|^2 + \|x-y, y-z\|^2 \quad \blacksquare$$

Contoh 4.3 Diberikan ruang bernorma-2 dengan $\|x, y\|^2$ dan jika diberikan $\|x+y, y+z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$ tunjukkan bahwa $4\sum$ adalah benar.

Jawab :

Diketahui $\|x, y\|^2$ adalah ruang bernorma-2, sehingga akan ditunjukkan bahwa $4\sum$ adalah benar.

Untuk menyelesaikan soal diatas kita ter lebih dahulu mendefenisikan

$$\|x+y, y+z\|^2 = \|x, y\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\|^2 + 2\langle x, y|z\rangle - 2\langle x, z|y\rangle + 2\langle y, z|x\rangle$$
$$\|x+y, y-z\|^2 = \|x, y\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\|^2 + 2\langle x, y|z\rangle + 2\langle x, z|y\rangle - 2\langle y, z|x\rangle$$
$$\|x-y, y+z\|^2 = \|x, y\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\|^2 - 2\langle x, y|z\rangle + 2\langle x, z|y\rangle + 2\langle y, z|x\rangle$$
$$\|x-y, y-z\|^2 = \|x, y\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\|^2 - 2\langle x, y|z\rangle - 2\langle x, z|y\rangle - 2\langle y, z|x\rangle$$

Berdasarkan teorema 4.1

$$4\sum = \|x+y, y+z\|^2 + \|x+y, y-z\|^2 + \|x-y, y+z\|^2 + \|x-y, y-z\|^2$$

Karena nilai $\|x+y, y+z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$, $\|x+y, y-z\|^2$ sudah didefinisikan , sehingga

$$\|x+y, y+z\|^2 + \|x+y, y-z\|^2 + \|x-y, y+z\|^2 + \|x-y, y-z\|^2$$

$$\left\langle \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 + 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle \right\rangle +$$
$$\left\langle \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 + 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle \right\rangle +$$
$$\left\langle \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 - 2\langle x,y|z\rangle + 2\langle x,z|y\rangle + 2\langle y,z|x\rangle \right\rangle +$$
$$\left\langle \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 - 2\langle x,y|z\rangle - 2\langle x,z|y\rangle - 2\langle y,z|x\rangle \right\rangle.$$

Sehingga $\|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 + \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 +$

$$\|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2 + \|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2$$

$$4\left[\|x,y\|^2 + \|y,z\|^2 + \|x,z\|^2\right] = \|x+y,y+z\|^2 + \|x+y,y-z\|^2 + \|x-y,y+z\|^2 + \|x-y,y-z\|^2$$

karena $\sum = \|x,y\|^2 + \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2$ maka terbukti bahwa

$$4\sum = \|x+y,y+z\|^2 + \|x+y,y-z\|^2 + \|x-y,y+z\|^2 + \|x-y,y-z\|^2 \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.2 Ruang linier bernorma-2 $\langle X, \|.,.\|\rangle$ adalah hasil kali dalam-2 jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in X, N(s,t) = \|sx+y, y+tz\|^2$ adalah fungsi dari $s^2t^2,\ s^2t,\ st^2,\ s^2,\ t^2,\ st$ dimana s dan t adalah bilangan real.

Bukti :

Diketahui ruang linier bernorma-2 dengan $\langle X, \|.,.\|\rangle$ adalah ruang hasil kali dalam-2 dan $N(s,t) = \|sx+y, y+tz\|^2$ $\forall\, x, y \in X$ dan s dan t adalah bilangan real. Akan ditunjukkan $N(s,t) = \|sx+y, y+tz\|^2$ $\forall\, x, y \in X$ adalah fungsi dari $s^2t^2,\ s^2t,\ st^2,\ s^2,\ t^2,\ st$.

$$
\begin{aligned}
N(s,t) &= \|sx+y, y+tz\|^2 \\
&= \langle sx+y, sx+y | y+tz\rangle \\
&= \langle sx, sx+y | y+tz\rangle + \langle y, sx | y+tz\rangle + \langle sx, y | y+tz\rangle + \langle y, y | y+tz\rangle \\
&= \langle y+tz, y+tz | sx\rangle + 2s\langle x, y | y+tz\rangle + \langle y+tz, y+tz | y\rangle \\
&= \langle y, y+z | sx\rangle + \langle tz, y+z | sx\rangle \\
&+ 2s\langle x, y | y+tz\rangle + \langle y, y+tz | y\rangle + \langle tz, y+tz | y\rangle \\
&= \langle y, y | sx\rangle + \langle tz, y | sx\rangle + \langle y, tz | sx\rangle + \langle tz, tz | sx\rangle + 2s\langle x, y | y+tz\rangle \\
&+ \langle y, y | y\rangle + \langle tz, y | y\rangle + \langle y, tz | y\rangle + \langle tz, tz | y\rangle \\
&= s^2\langle y, y | x\rangle + s^2 t\langle z, y | x\rangle + s^2 t\langle y, z | sx\rangle \\
&+ s^2 t^2\langle z, z | x\rangle + 2s\langle x, y | y+tz\rangle + t^2\langle z, z | y\rangle \\
&= s^2\|x, y\|^2 + 2s^2 t\langle y, z | x\rangle + s^2 t^2\|x, z\|^2 + 2s\langle x, y | y+tz\rangle + t^2\|y, z\|^2
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Lemma 4.1 sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|x+y, 2y+tz\|^2 &= 4\left\|x+y, y+\frac{t}{2}z\right\|^2 \\
&= 4\left[\|x, y\|^2 + \left\|y, \frac{t}{2}z\right\|^2 + \left\|x, \frac{t}{2}z\right\|^2 - 2\left\langle x, y \middle| \frac{t}{2}z\right\rangle + 2\left\langle x, \frac{t}{2}z \middle| y\right\rangle + 2\left\langle y, \frac{t}{2}z \middle| x\right\rangle\right] \\
&= 4\|x, y\|^2 + t^2\|y, z\|^2 + t^2\|x, z\|^2 + 2t^2\langle x, y | z\rangle - 4t\langle x, z | y\rangle + 4t\langle y, z | x\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x+y, tz\|^2 &= \langle x+y, x+y | tz\rangle \\
&= \langle x, x+y | tz\rangle + \langle y, x+y | tz\rangle \\
&= \langle x, x | tz\rangle + \langle y, x | tz\rangle + \langle y, x | tz\rangle + \langle y, y | tz\rangle \\
&= t^2\|x, z\|^2 + 2t^2\langle x, z | y\rangle + t^2\|y, z\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x-y, 2y+tz\|^2 &= 4\left\|x-y, y+\frac{t}{2}z\right\|^2 \\
&= 4\left[\|x, y\|^2 + \left\|y, \frac{t}{2}z\right\|^2 + \left\|x, \frac{t}{2}z\right\|^2 - 2\left\langle x, y \middle| \frac{t}{2}z\right\rangle + 2\left\langle x, \frac{t}{2}z \middle| y\right\rangle + 2\left\langle y, \frac{t}{2}z \middle| x\right\rangle\right] \\
&= 4\|x, y\|^2 + t^2\|y, z\|^2 + t^2\|x, z\|^2 - 2t^2\langle x, y | z\rangle - 4t\langle x, z | y\rangle + 4t\langle y, z | x\rangle \\
\|x-y, 2y+tz\|^2 &= t^2\|x, z\|^2 - 2t^2\langle x, y | z\rangle + t^2\|y, z\|^2
\end{aligned}
$$

Sedemikian sehingga untuk

$$\left\langle x, y \middle| y + tz \right\rangle \quad = t^2 \left\langle x, y \middle| z \right\rangle - t \left\langle x, z \middle| y \right\rangle \text{ jadi didapat untuk}$$

$$\begin{aligned} N\langle s, t \rangle \quad &= s^2 t^2 \|x, y\|^2 + 2s^2 t \left\langle y, z \middle| x \right\rangle + 2st^2 \left\langle x, y \middle| z \right\rangle \\ &+ s^2 \|x, y\|^2 + t^2 \|y, z\|^2 - 2st \left\langle x, z \middle| x \right\rangle \\ &= \|sx + y, y + tz\|^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa setiap $x, y \in X$, $N(s,t) = \|sx + y, y + tz\|^2$ adalah fungsi dari $s^2 t^2$, $s^2 t$, st^2, s^2, t^2, st dimana s dan t adalah bilangan real.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dapat ditarik beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Hasil kali dalam mempunyai struktur lain yaitu hasil kali dalam-2 .
2. Ruang bernorma juga dapat dibentuk ke dalam stuktur ruang bernorma-2.
3. Ruang linier bernorma-2 mempunyai suatu keterkaitan dengan dengan ruang hasil kali dalam-2.

5.2 Saran

Pada penulisan ini dibahas mengenai keterkaitan antara ruang hasil kali dalam-2 dan ruang bernorma -2. Bagi yang tertarik dapat mengembangkan penelitian ini dengan menentukan keterkaitan antara ruang bernorma-$2k$ dan ruang hasil kali dalam-$2k$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. " *Aljabar Linear Elementer"* , Drexel University, Amerika Serikat .1997.

CHEN,W.W.L. "Linear Functional Analysis " , *J.Math* .2001.

David, J. Silvester . " *A Finite Element Primer* ", University of Manchester, London Version.1.1,2009.

E.H. Connell. " *Elements of Abstract and Linear Algebra" ,* Miami University, Florida.1999.

K. Ehret. *" Linear 2-Norm Space"*, not online available http://www.2-normspace.com, diakses 16 desember 2009.

White, A." Charaterization of 2-Inner Product Space" , *Proceedings of Nonlinear Functional Analysis and Applications,* Vol. 2 , halm.145-152, 1997.

Willey, J . " *Linear Algebra* " , New York University. New York .1997.