PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

Oleh:

DESI ARIASTUTY
10254020547

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2009

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

DESI ARIASTUTY
NIM: 10254020547

Tanggal Sidang : 20 Agustus 2009
Periode Wisuda : Oktober 2009

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ menggunakan metode dekomposisi Adomian berdasarkan nilai batas dan nilai awal nonliniernya $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$ dengan komponen nonlinear $Nu = f(u)$. Tujuan dari metode dekomposisi Adomian ini adalah untuk memperoleh persamaan eksak dari persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear tersebut. Dari perhitungan terlihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian ini lebih efektif dan akurat karena dapat memperkecil *error* dengan cara memperbanyak jumlah suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots,$

Kata Kunci: *Error*, Metode Dekomposisi Adomian, Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Nonlinear.

ON THE SOLUTION OF THE NONLINEAR SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION BY USING ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

DESI ARIASTUTY
NIM: 10254020547

Date of Final Exam: 20th Auguts 2009
Graduation Cremony Priod: Oktober 2009

Mathematics Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This paper discusses the solving of nonlinear in the second-order ordinary differential equation by *using Adomian decomposition method based on the boundary and initial value problem nonlinear* $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$ *with the nonlinear term* $Nu = f(u)$ *. Goal of the Adomian decomposition method is to obtain exact equality of the nonlinear in the second-order ordinary differential equation. Seen from the calculation that the results obtained using the Adomian decomposition method is more effective and accurate because the error can be lossly with increase to equal variables* $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots$.

***Keywords**: Adomian Decomposition Method, Error, Nonlinear in the second-order ordinary Differential Equation*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial merupakan mata kuliah kalkulus mengenai persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Sedangkan turunan fungsi yang hanya bergantung pada satu variabel terikat disebut dengan Persamaan Diferensial Biasa (PDB).

Pada persamaan diferensial terkadang muncul bentuk-bentuk linear dan nonlinear, yang mana persamaan diferensial linear dapat diselesaikan secara analitik sehingga menghasilkan penyelesaian eksak. Sedangkan persamaan diferensial nonlinear sangat sulit diselesaikan secara analitik walaupun sebagian kecil dapat diselesaikan dengan metode variable terpisah, tetapi ada yang tidak dapat diselesaikan dengan metode tersebut. Maka persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah dapat diselesaikan dengan salah satu metode, yaitu metode dekomposisi Adomian.

Metode dekomposisi diperkenalkan pertama kali oleh Adomian (1989-1994) yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan fungsional linear dan nonlinear, seperti persamaan diferensial aljabar, persamaan diferensial biasa, persamaan diferesial parsil, persamaan diferensial integral, yang selanjutnya disebut dengan metode dekomposisi Adomian. Metode dekomposisi Adomian merupakan penyelesaian semi analitik yang melibatkan komputasi, akurasi dan hampiran terhadap persamaan operator deterministik dan stokastik baik linear maupun nonlinear.

Menurut Mustafa (2005) yang melakukan perbandingan metode dekomposisi Adomian dengan beberapa metode penyelesaian konvensional lainnya menunjukkan bahwa metode dekomposisi Adomian lebih efektif jika dibandingkan dengan metode lainnya. Khusus persamaan diferensial nonlinear, Kaya (2002) telah menyelidiki penyelesaian dengan menggunakan metode dekomposisi adomian. Hasan & Zhu (2008) mengkaji penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear singular dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, dan diperoleh hasil bahwa metode modifikasi dekomposisi Adomian cukup efektif.

Hal tersebutlah yang membuat penulis tertarik untuk menggunakan metode dekomposisi adomian dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear dengan judul "**Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Nonlinear Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian**".

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini penulis hanya membatasi pada persamaan diferensial biasa nonlinear dengan persamaan umumnya $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ dengan variabel bebas t.

1.4 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear dengan persamaan umumnya $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Dengan metode dekomposisi Adomian maka penulis dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$.

2. Penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear yang dihasilkan oleh metode dekomposisi Adomian ini cukup efektif dan akurat.
3. Metode dekomposisi ini dapat memberikan akurasi yang cukup baik.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari beberapa bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, sistematika penulisan laporan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan landasan teori, seperti: persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial parabolik, dan metode dekomposisi Adomian.

BAB III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari skripsi ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang metode dekomposisi Adomian yang digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear orde dua dengan persamaan umumnya $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang digunakan pada tugas akhir ini adalah :

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung suatu fungsi yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunannya. Persamaan diferensial dibagi 2, yaitu :

a) Diferensial Biasa.

Persamaan diferensial biasa merupakan turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari satu variabel. Turunan pertama ini biasanya digunakan untuk mencari nilai maksimum dari variabelnya.

Definisi 2.1 Diferensial biasa terjadi jika *u* adalah fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel dan hanya dapat diturunkan terhadap variabel tersebut, dengan rumus:

$$u^{'}(\mathrm{t}) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

b) Diferensial Parsial.

Persamaan diferensial parsial merupakan turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari dua variabel *x* dan *t*.

Definisi 2.2 Diferensial parsial terjadi jika *u* *a*dalah fungsi dua variabel *x* dan *t* dan diturunkan terhadap salah satu variabel dengan menganggap variabel lainnya konstanta, dengan rumus:

$$u_x^{'}(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h}$$, jika diturunkan terhadap *x*

$$u_t^{'}(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}$$, jika diturunkan terhadap *t*

Aturan untuk mencari turunan parsial jika $z = u(x,t)$, yaitu:

1. Untuk mencari u, pandang t sebagai konstanta dan diferensialkan $u(x,t)$ terhadap x.
2. Untuk mencari u, pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $u(x,t)$ terhadap t.

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa disebut persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*).

Contoh:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + 2u = 0$$

dari bentuk persamaan diferensial diatas, dapat dinyatakan bahwa u adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas.

Definisi 2.3 Persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan yang mempunyai bentuk umum,

$$F(t, u, u', u'', u^{(3)}, \cdots, u^{(n)}) = f(t)$$

dengan tanda aksen menunjukan turunan terhadap t, yaitu $u' = \dfrac{du}{dt}, u'' = \dfrac{d^2u}{dt^2}$, dan seterusnya. Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde n, yaitu:

$$A_n \frac{d^n u}{dt^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + A_1 \frac{du}{dt} + A_0 u = B \tag{2.1}$$

Persamaan (1) dikatakan persamaan diferensial biasa linear jika nilai $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_1, A_0$, dan B adalah konstanta atau suatu fungsi lain dan dikatakan persamaan diferensial biasa nonlinier jika $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_1, A_0$, dan B adalah suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut.

Persamaan diferensial ini memiliki beberapa kelompok, yaitu:

a) Berdasarkan orde.

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh:

i. $\frac{du}{dt} = t + 5$, disebut orde satu karena orde turunan tertingginya bernilai satu

ii. $\frac{d^2u}{dt^2} + x\frac{du}{dt} - 3u = 0$, disebut orde dua karena orde turunan tertingginya bernilai dua

b) Berdasarkan derajat

Jumlah derajat ditentukan dengan cara melihat fungsi diferensial yang memiliki pangkat pada persamaan tersebut.

Contoh:

i. $\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + 2u = 0$, memiliki derajat satu.

ii. $\frac{d^3u}{dt^3} + 2\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^2 + \frac{du}{dt} = \cos t$, memiliki derajat dua.

c) Berdasarkan linear dan nonlinear

Pada persamaan diferensial dapat dilihat secara langsung bahwa persamaan tersebut linear atau nonlinear. Dengan melihat koefisien pada fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linear, sedangkan jika koefisiennya suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut maka persamaan itu disebut persamaan diferensial nonlinear.

Contoh:

I. Linear

i. $\frac{du}{dt} = tu + 1$

ii. $a_0(t)\frac{du}{dt} + a_1(t)u = g(t)$

II. Nonlinear

i. $u\dfrac{du}{dt} = -t$

ii. $uu'' + u' + u = 1$

iii. $(u')^2 + u = 0$

2.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial Biasa

2.3.1 Persamaan Diferensial Biasa Homogen dengan Koefisien Konstanta

Pertimbangkan persamaan homogen linear orde dua berikut :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.2}$$

dengan *a*,*b*, dan *c* adalah konstanta dan $a \neq 0$. Persamaan (2.2) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{mx}$, sehingga

$$a\frac{d^2(e^{mx})}{dx^2} + b\frac{d(e^{mx})}{dx} + ce^{mx} = 0,$$

$$e^{mx}am^2 + e^{mx}bm + e^{mx}c = 0,$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Oleh karena $e^{mx} \neq 0$, maka $y(x) = e^{mx}$ adalah penyelesaian persamaan (2.2) jika dan hanya jika *m* memenuhi persamaan karakteristik,

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.3}$$

dan penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.3) adalah

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

dan

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

dengan $D = b^2 - 4ac$.

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaaan diferensial linear orde dua di atas bergantung kepada nilai diskriminan *D*.

a) Akar-akar Real dan Berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Pada persamaan diferensial yang nilai diskriminannya positif, maka akar-akar karakteristiknya akan bernilai real dan berbeda . Apabila m_1 dan m_2 adalah akar-akar persamaan karakteristik,

$$ay''+by'+cy = 0 \tag{2.4}$$

mempunyai akar-akar yang real dan berbeda m_1 dan m_2, maka persamaan (2.4) mempunyai dua penyelesaian bebas linear yaitu

$$y_1(x) = c_1 e^{m_1 x}$$

dan

$$y_2(x) = c_2 e^{m_1 x}$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah,

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang.

b) Akar-akar Berulang

Pada persamaan karakteristik (2.3) untuk kasus akar-akar yang sama $m_1 = m_2$, maka solusi $y_1(x) = e^{m_1 x}$ dan solusi untuk $y_2(x)$ ditentukan dengan menggunakan metode reduksi. Misalkan $y(x) = v(x)e^{(-b/2a)x)}$, maka turunannya adalah

$$y'(x) = v'(x)e^{(-b/2a)x} - \frac{b}{2a} v(x)e^{(-b/2a)x}$$

$$= \left(v'(x) - \frac{b}{2a} v(x) \right) e^{(-b/2a)x}$$

dan

$$y''(x) = v''(x)e^{(-b/2a)x} - \frac{b}{2a} v'(x)e^{(-b/2a)x} - \frac{b}{2a} v'(x)e^{(-b/2a)x}$$

$$+ \left(\frac{b}{2a} \right)^2 v(x)e^{(-b/2a)x}$$

$$y''(x) = v''(x)e^{(-b/2a)x} - \frac{b}{a} v'(x)e^{(-b/2a)x} + \frac{b^2}{4a^2} v(x)e^{(-b/2a)x}$$

$$y'' = \left(v''(x) - \frac{b}{a} v'(x) + \frac{b^2}{4a^2} v(x) \right) e^{(-b/2a)x}$$

Subsitusikan *y,y',y''* ke dalam persamaan (2.2), diperoleh

$$a\left(v''(x) - \frac{b}{a} v'(x) + \frac{b^2}{4a^2} v(x) \right) e^{(-b/2a)x} + b\left(v'(x) - \frac{b}{2a} v(x) \right) e^{(-b/2a)x}$$

$$+ cv(x) e^{(-b/2a)x} = 0$$

$$a\left(v''(x) - \frac{b}{a} v'(x) + \frac{b^2}{4a^2} v(x) \right) + b\left(v'(x) - \frac{b}{2a} v(x) \right) + cv(x) = 0$$

$$av''(x) - bv'(x) + \frac{b^2}{4a^2} v(x) + bv'(x) - \frac{b^2}{2a} v(x) + cv(x) = 0$$

$$av''(x) - \frac{b^2}{4a} v(x) + cv(x) = 0$$

$$av''(x) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) v(x) = 0$$

Oleh karena D = 0 maka,

$$av'' = 0$$

dan

$$v''(x) = 0$$

Dengan mengintegralkan bentuk persamaan terakhir,

$$\int d^2 v(x) = \int 0 dx^2 \rightarrow dv(x) = c_1 dx$$

dan

$$\int dv(x) = \int c_1 dx \rightarrow v(x) = c_1 x + c_2$$

Ambil $c_1 = 1$ dan $c_2 = 0$, diperoleh $v(x) = x$ sehingga penyelesaian untuk y_2 adalah

$$y_2(x) = xe^{(-b/2a)x}$$

Jadi solusi umum untuk persamaan (2.2) adalah

$$y(x) = c_1 e^{m_1(x)} + c_2 x e^{m_2(x)} \tag{2.4}$$

c) Akar-akar Imajiner

Jika nilai diskriminan lebih kecil nol, maka akar-akar persamaan karakteristik adalah imajiner. Misalkan akar-akar persamaan tersebut adalah $m_1 = \alpha + i\beta$ dan $m_2 = \alpha - i\beta$, maka penyelesaian umum dari persamaan diferensial diberikan oleh

$$y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (2.5)$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

dimana θ adalah bilangan real, diperoleh :

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$

dan

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Dengan menggunakan bentuk di atas, maka persamaan (2.5) dapat dibentuk kembali menjadi

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) \\ &= e^{\alpha x}\left[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[(C_1C_2)\cos\beta x + (C_1 i - C_2 i)\sin\beta x\right] \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Untuk lebih menyederhanakan, maka kembali memisalkan $C_1 + C_2$ sebagai c_1 dan $C_1 i - C_2 i$ sebagai c_2, sehingga bentuk penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right) \qquad (2.7)$$

Jika akar-akar imajiner ini berulang, misalnya $m_1 = m_2 = \alpha + i\beta$ dan $m_3 = m_4 = \alpha - i\beta$, maka

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} + C_3 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_4 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}\left[\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) + x\left(C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}\right)\right] \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus Euler, maka persamaan (2.8) dapat dibentuk kembali menjadi

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) + x\left(C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}\right)\right]$$

$$= e^{ax}\left[\left(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right)\right.$$
$$\left. + x\left(C_3(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_4((\cos\beta x - i\sin\beta x)\right)\right]$$
$$= e^{ax}\left[\left((C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 i - C_2 i)\sin\beta x\right)\right.$$
$$\left. + \left(x(C_3 + C_4)\cos\beta x + (C_3 i - C_4 i)\sin\beta x\right)\right] \qquad (2.9)$$

Untuk lebih menyederhanakan, maka kembali memisalkan $C_1 + C_2 = c_1$, $C_1 i - C_2 i = c_2$, $C_3 + C_4 = c_3$, dan $C_3 i - C_4 i = c_4$, sehingga bentuk penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y(x) = e^{ex}\left[\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right) + x\left(c_3\cos\beta x + c_4\sin\beta x\right)\right] \qquad (2.10)$$

2.3.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen dengan Koefisien Konstanta

Misalkan $y = f(x)$ adalah sebuah fungsi pandang suatu persamaan diferensial nonhomogen berikut :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (2.11)$$

dan misalkan $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ adalah penyelesaian bebas linear yang berkorespondensi dengan persamaan homogen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dengan y_p adalah penyelesaian diferensial yang berkorespondensi dengan persamaan nonhomogennya. Maka penyelesaian umum dari persamaan nonhomogen (2.11) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \qquad (2.12)$$

2.3.3 Persamaan Diferensial Biasa dengan Koefisien Variabel

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \qquad (2.13)$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ adalah konstanta dari **persamaan Cauchy-Euler**. Selanjutnya, menyelesaikan persamaan diferensial homogen orde dua, dengan koefisien variabel diberikan oleh :

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (2.14)$$

dan persamaan diferensial nonhomogen ordenya,

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \qquad (2.15)$$

Untuk menyelesaikan persamaan homogen, kita akan mencoba suatu penyelesaian dalam bentuk $y = x^m$,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

Akibatnya, persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ax^2m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m \\ &= x^m(am(m-1) + bm + c) \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan diferensial m adalah penyelesaian dari persamaan kerakteristik

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

atau

$$am^2 + (b-a) + c = 0 \qquad (2.15)$$

Terdapat tiga kasus berbeda yang harus dipertimbangkan berdasarkan bagaimana akar-akar persamaan karakteristik, apakah real dan berbeda, real dan kembar, atau kompleks dan berlawanan.

Kasus I. Akar-akar persamaan berbeda

Misalkan m_1 dan m_2 adalah akar-akar persamaan diferensial (2.15) dan $m_1 \neq m_2$, maka $y_1 = x^{m_1}$ dan $y_2 = x^{m_2}$ adalah bentuk dasar himpunan penyelesaian. Oleh karena itu, penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \tag{2.16}$$

Kasus II. Akar-akar persamaan sama

Jika $m_1 = m_2$, kita hanya memperoleh suatu penyelesaian yaitu $y = c_1 x^{m_1}$. Andaikan persamaan kuadratiknya adalah $am^2 + (b-a)m + c = 0$, oleh karena akar persamaannya sama dan real, maka diskriminannya adalah nol, dan $m_1 = m_2 = -\dfrac{(b-a)}{2a}$. Selanjutnya membuat penyelesaian kedua y_2, tulis kembali persamaaan Cauchy-Euler

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

Akan dibentuk kembali persamaan di atas dalam bentuk

$$y'' + \frac{b}{ax} y' + \frac{c}{ax^2} y = 0$$

atau

$$y'' + P(x) + y' + Q(x) y = 0$$

dengan $P(x) = \dfrac{b}{ax}, Q(x) = \dfrac{c}{ax^2}$

Jadi penyelesaian umum untuk akar-akar yang sama

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x \tag{2.17}$$

Jika akar-akar m_1 berulang sebanyak *k* kali, maka dapat ditunjukkan penyelesaian

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x + c_3 x^{m_1} (\ln x)^2 + \cdots + c_k x^{m_1} (\ln x)^{k-1} \tag{2.18}$$

Kasus III. Akar-akar kompleks konjugat

Jika m_1 dan m_2 adalah akar-akar kompleks konjugat,

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

dan

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

dengan α dan β > 0 adalah real, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$
$$= C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta}$$
$$= x^{\alpha}\left(C_1 e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right)$$

Dari bentuk Euler

$$e^{i\beta} = \cos\beta + \sin\beta$$

sehingga dengan formula Euler

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$$

dapat diubah menjadi

$$x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + \sin(\beta \ln x)$$

Dengan $C_1 + C_2 = c_1$ dan $C_{1i} - C_{2i} = c_2$, jadi persamaan umum untuk akar-akar kompleks konjugat adalah

$$y = x^{\alpha}\left[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right] \tag{2.19}$$

2.4 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear berdasarkan nilai awalnya dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak.

Misalkan:

$$Lu + Ru + Nu = \theta(t)$$
$$Lu = \theta(t) - Ru - Nu$$
$$L^{-1}Lu = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.20}$$

dimana $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa *invers* operator L_{tt}^{-1} ada, dan merupakan integral sebanyak orde yang ada pada *L* terhadap *t* dari *0* sampai *t*. Ambil *n=2*, maka $L = \dfrac{d^2}{dt^2}$ sehingga:

$$L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$$

dari persamaan (2.20) diperoleh :

$$u = u(0) + tu^{'}(0) + L^{-1}\theta(t) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \qquad (2.21)$$

diasumsikan bahwa *Nu* adalah deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Misalkan *Nu*=*f*(*u*),

maka

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n)$$

dengan rumus umum

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} c(v,n) f^{(v)}(u_0) \qquad (2.22)$$

Oleh karena deret polinomial Adomian $A_i (i = 0,1,\cdots,n)$ bergantung kepada $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n$ dan merupakan deret konvergen, sehingga

$$A_0 = f(u_0) \qquad (2.23)$$

maka

$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) \qquad (2.24)$$

$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}} f(u_0)\right) \qquad (2.25)$$

$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}} f(u_0)\right) \qquad (2.26)$$

$$A_4 = u_4\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_2^{\,2}}{2!} + u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}u_2}{2!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}} f(u)\right)$$
$$+\left(\frac{u_1^{\,4}}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{du_0^{\,4}} f(u_0)\right) \qquad (2.27)$$

$$\vdots$$

sehingga $f(u)$ dapat disusun kembali sebagai deret,

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n)$$

$$= f(u_0) + u_1\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + u_2\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\;2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\;2}} f(u_0)\right)$$

$$+ u_3\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\;2}} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\;3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\;3}} f(u_0)\right)$$

$$+ u_4\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_2^{\;2}}{2!} + u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\;2}} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\;2}u_2}{2!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\;3}} f(u_0)\right)$$

$$+ \left(\frac{u_1^{\;4}}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{du_0^{\;4}} f(u_0)\right) + \cdots$$

$$= f(u_0) + (u_1 + u_2 + \cdots)\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left[\left(\frac{u_1^{\;2}}{2!}\right) + u_1u_2 + \cdots\right]$$

$$\left(\frac{d^2}{du_0^{\;2}} f(u_0)\right) + \cdots$$

$$= f(u_0) + \left[\left(\frac{u - u_0}{1!}\right)\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right)\right] + \left[\left(\frac{(u - u_0)^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\;2}} f(u_0)\right)\right] + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(u - u_0)^n}{n!}\right)\left(\frac{d^n}{du_0^{\;n}} f(u_0)\right)\right]$$

Contoh 2.1

Misal $Nu = u^5$ carilah nilai A_0 sampai A_5

<u>Penyelesaian</u> :

$A_0 = u_0^{\;5}$

$A_1 = 5u_0^{\;4}u_1$

$A_2 = 5u_0^{\;4}u_2 + 10u_0^{\;3}u_1^{\;2}$

$A_3 = 5u_0^{\;4}u_3 + 20u_0^{\;3}u_1u_2 + 10u_0^{\;2}u_1^{\;3}$

$A_4 = 5u_0^{\;4}u_4 + 5u_1^{\;4}u_0 + 10u_0^{\;3}u_2^{\;2} + 20u_0^{\;3}u_1u_3 + 30u_0^{\;2}u_1^{\;2}u_2$

$$A_5 = u_1^{\,5} + 5u_0^{\,4}u_5 + 20u_0^{\,3}u_1u_4 + 20u_0^{\,3}u_2u_3 + 20u_1^{\,3}u_0u_2 + 30u_0^{\,2}u_2^{\,2}u_1 + 30u_0^{\,2}u_1^{\,2}u_3$$

Contoh 2.2

Misal $Nu = u^5$ carilah nilai A_0 sampai A_{10}

Penyelesaian :

$A_0 = u_0^{\,3}$

$A_1 = 3u_0^{\,2}u_1$

$A_2 = 3u_0^{\,2}u_2 + 3u_1u_0$

$A_3 = u_1^{\,3} + 3u_0^{\,2}u_3 + 6u_0u_1u_3$

$A_4 = 3u_0^{\,2}u_4 + 3u_1^{\,2}u_2 + 3u_2^{\,2} + 6u_0u_1u_3$

$A_5 = 3u_0^{\,2}u_5 + 3u_1^{\,2}u_3 + 3u_2^{\,2}u_1 + 6u_0u_1u_4 + 6u_0u_2u_3$

$A_6 = u_2^{\,3} + 3u_0^{\,2}u_6 + 3u_1^{\,2}u_4 + 3u_3^{\,2}u_0 + 6u_0u_1u_5 + 6u_0u_2u_4 + 6u_1u_2u_3$

$A_7 = 3u_0^{\,2}u_7 + 3u_1^{\,2}u_5 + 3u_2^{\,2}u_3 + 3u_3^{\,2}u_1 + 6u_0u_1u_6 + 6u_0u_2u_5 + 6u_0u_3u_4$

$A_8 = 3u_0^{\,2}u_8 + 3u_1^{\,2}u_6 + 3u_2^{\,2}u_4 + 3u_3^{\,2}u_2 + 3u_4^{\,2}u_0 + 6u_0u_1u_7 + 6u_0u_2u_6 + 6u_0u_3u_5$
$\quad + 6u_1u_2u_5 + 6u_1u_3u_4$

$A_9 = u_3^{\,3} + 3u_0^{\,2}u_9 + 3u_1^{\,2}u_7 + 3u_2^{\,2}u_5 + 3u_4^{\,2}u_1 + 6u_0u_1u_8 + 6u_0u_2u_7 + 6u_0u_3u_6$
$\quad + 6u_0u_4u_5 + 6u_1u_2u_6 + 6u_1u_3u_5 + 6u_2u_3u_4$

$A_{10} = 3u_0^{\,2}u_{10} + 3u_1^{\,2}u_8 + 3u_2^{\,2}u_6 + 3u_3^{\,2}u_4 + 3u_4^{\,2}u_2 + 3u_5^{\,2}u_0 + 6u_0u_1u_9 + 6u_0u_2u_8$
$\quad + 6u_0u_3u_7 + 6u_0u_4u_6 + 6u_1u_2u_7 + 6u_1u_3u_6 + 6u_1u_4u_5 + 6u_2u_3u_5$

Pada pembahasan sebelumnya, polinomial Adomian A_n digunakan untuk menghampiri bentuk nonlinear tunggal, pada kasus bentuk nonlinear yang melibatkan derivatifnya,

$$f(u) = g(u)h(u)$$

maka polinomial Adomian A_n dibentuk oleh

$$A_n = B_0C_n + B_1C_{n-1} + B_2C_{n-2} + \cdots + B_{n-1}C_1 + B_nC_0$$

Bentuk $B_i\,(i = 0,1,2,\cdots,n)$ diperoleh dari pengertian polinomial Adomian sebelumnya untuk $g(u)$, yaitu :

$$B_0 = g(u_0)$$

$$B_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}g(u_0)\right)$$

$$B_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}g(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}g(u_0)\right)$$

$$B_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0}g(u_0)\right) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}g(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}g(u_0)\right)$$

$$B_4 = u_4\left(\frac{d}{du_0}g(u_0)\right) + \left(\frac{u_2^{\,2}}{2!} + u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}g(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}u_2}{2!}\right)$$
$$\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}g(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,4}}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{du_0^{\,4}}g(u_0)\right)$$

$$\vdots$$

dan $C_i\,(i = 0,1,2,\cdots,n)$ diperoleh dengan cara yang sama, yaitu

$$C_0 = h(u_0)$$

$$C_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}h(u_0)\right)$$

$$C_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}h(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}h(u_0)\right)$$

$$C_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0}h(u_0)\right) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}h(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}h(u_0)\right)$$

$$C_4 = u_4\left(\frac{d}{du_0}h(u_0)\right) + \left(\frac{u_2^{\,2}}{2!} + u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}h(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}u_2}{2!}\right)$$
$$\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}h(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,4}}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{du_0^{\,4}}h(u_0)\right)$$

$$\vdots$$

untuk itu, jika diuraikan maka bentuk $A_i\,(i = 0,1,2,\cdots,n)$ dapat diuraikan,

$$A_0 = B_0C_0$$

$$A_1 = B_0C_1 + B_1C_0$$

$$A_2 = B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0$$

$$A_3 = B_0C_3 + B_1C_2 + B_2C_1 + B_3C_0$$

$$A_4 = B_0C_4 + B_1C_3 + B_2C_2 + B_3C_1 + B_4C_0$$

$$\vdots$$

$$A_n = B_0C_n + B_1C_{n-1} + B_2C_{n-2} + \cdots + B_{n-1}C_1 + B_nC_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} B_iC_{n-i}$$

Menurut (G. Adomian) metode dekomposisi memuat komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(t)$.

Definisi 2.4 Bahwa fungsi $u(t)$ adalah jumlah komponen-komponen yang didefinisikan sebagai deret dekomposisi yaitu deret dari $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots$ yang dapat ditulis sebagai:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \qquad (2.28)$$

Persamaan pada(2.21) dapat diurai menjadi:

$$u(t) = u_0(t) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka

$$u_1(t) = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \qquad (2.29)$$

$$u_2(t) = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \qquad (2.30)$$

$$u_3(t) = -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2 \qquad (2.31)$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(t) = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n$$

Setelah setelah nilai suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{n+1}(t)$ telah diketahui, maka penyelesaian eksak dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \tag{2.32}$$

dengan

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)$$

Misalkan $Nu = 0$, maka persamaan dikatakan linier, dan persamaan (2.21) menjadi

$$u = u(0) + tu'(0) + L_t^{-1}\phi(t) - L_t^{-1}Ru \tag{2.33}$$

dimana

$$u_0 = u(0) + tu'(0) + L_t^{-1}\phi(t)$$

dan

$$u_1 = L_t^{-1}Ru_0 \tag{2.34}$$

$$u_2 = L_t^{-1}Ru_1 \tag{2.35}$$

$$u_3 = L_t^{-1}Ru_2 \tag{2.36}$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1} = L_t^{-1}Ru_n$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{n+1}(t)$ telah diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \tag{2.37}$$

dengan

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)$$

BAB III
METODELOGI

Metode yang digunakan pada tugas akhir ini adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial biasa nonlinear dengan persamaan umumnya $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ dengan komponen nonlinearnya $Nu=f(u)$ yang merupakan deret polinomial adomain A_n dan ditulis $N_u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$
2. Mendapatkan nilai $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ dengan cara mengubah persamaan $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ kedalam bentuk operator serta menerapkan invers operator.
3. Selanjutnya penulis mencari nilai $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$.
4. Menjumlahkan $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$ karena inilah persamaan eksak dari persamaan diferensial biasa nonlinear tersebut.
5. Menggunakan program ***Maple 9.5*** dalam menyelesaikan masalah perhitungan.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Homogen

Pertimbangkan kembali persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear berikut

$$u''+u'+u+f(u)=\phi(t) \tag{4.1}$$

Persamaan (4.1) dikatakan homogen jika $\theta(t)=0$, sehingga persamaan diferensial orde dua nonlinear dapat ditulis :

$$u''+u'+u+f(u)=0$$

atau

$$u''=-u'-u-f(u) \tag{4.2}$$

Misal diasumsikan bahwa operator diferensial L_{tt}^{-1} ada dan didefenisikan sebagai integral ganda terhadap t dari 0 sampai t, yaitu :

$$L_{tt}^{-1}(\cdot)=\int_0^t\int_0^t(\cdot)dtdt$$

Maka penerapan bentuk operator L_{tt}^{-1} pada persamaan (4.2) memberikan

$$L_{tt}^{-1}(u'')=L_{tt}^{-1}(u')-L_{tt}^{-1}(u)-L_{tt}^{-1}f(u)$$

atau

$$u=L_{tt}^{-1}u'-L_{tt}^{-1}u-L_{tt}^{-1}f(u)+u(0)+u'(0)t \tag{4.3}$$

dengan $f(u)$ adalah bentuk nonlinear.

Jika diberikan nilai awal $u(0)=c_1$ dan $u'(0)=c_2$. Persamaan (4.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$u(t) \quad = c_1+tc_2-L_{tt}^{-1}(u')-L_{tt}^{-1}(u)+L_{tt}^{-1}f(u) \tag{4.4}$$

Penyelesaian pada persamaan (4.4) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(t)$ yang merupakan deret $u_0(t),u_1(t),u_2(t),\cdots$, ditulis

$$u(t) = u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

Selanjutnya komponen nonlinear $f(u)$ diekspansi dengan menggunakan deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka persamaan (4.4) menjadi

$$u(t) = c_1 + tc_2 - L_{tt}^{-1}(u') - L_{tt}^{-1}(u) + L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

atau

$$u(t) = c_1 + tc_2 - L_{tt}^{-1}(u') - L_{tt}^{-1}(u) + L_{tt}^{-1}A_0 + L_{tt}^{-1}A_1 + L_{tt}^{-1}A_2 + \cdots \qquad (4.5)$$

Polinomial Adomian A_n pada persamaan (4.5) diperoleh dari persamaan (2.3)

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right)$$

$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}} f(u_0)\right)$$

$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0} f(u_0)\right) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}} f(u_0)\right) + \left(\frac{u_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}} f(u_0)\right)$$

$$\vdots$$

Berdasarkan persamaan (4.5) diperoleh :

$$u_0(t) \quad = u(0) + tu'(0) \qquad (4.6)$$

maka

$$u_1(t) = -L_{tt}^{-1}u_0' - L_{tt}^{-1}u_0 + L_{tt}^{-1}(A_0) \qquad (4.7)$$

$$u_2(t) = -L_{tt}^{-1}u_1' - L_{tt}^{-1}u_1 + L_{tt}^{-1}(A_1) \qquad (4.8)$$

$$u_3(t) = -L_{tt}^{-1}u_2' - L_{tt}^{-1}u_2 + L_{tt}^{-1}(A_2) \qquad (4.9)$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(t) = -L_{tt}^{-1}u_n' - L_{tt}^{-1}u_n + L_{tt}^{-1}(A_n)\ ,\ n \ge 0 \qquad (4.10)$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{n+1}(t)$ telah diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \tag{4.11}$$

dengan

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian eksak dari persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear berikut

$$u'' + u' + u^3 = 0 \tag{4.12}$$

dengan masalah nilai awalnya *u*(0)=4 dan *u'*(0)=0.

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear pada persamaan (4.12) dilakukan dengan mengubah bentuk menjadi

$$u'' = -u' - u^3$$

Penerapan operator diferensial L_{tt}^{-1} memberikan :

$$u = u(0) + u'(0)t - L_{tt}^{-1}u' - L_{tt}^{-1}u^3$$

dan diperoleh :

$$u_0(t) = u(0) + tu'(0)$$

Berdasarkan nilai awal *u*(0)=4 dan *u'*(0)=0, maka

$$u_0(t) = 4$$

Untuk memperoleh nilai $u_1(t)$, maka kita harus mencari nilai A_0 dari persamaan (4.6), yaitu :

$$A_0 = u_0^3$$
$$= 64$$

Oleh karena itu,

$$u_1(t) = -L_{tt}^{-1}u'_0 - L_{tt}^{-1}(A_0)$$

maka

$$u_1(t) = -\int_0^t\int_0^t 64\,dtdt$$
$$= -32t^2$$

Selanjutnya nilai A_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.7), yaitu :

$$A_1 = 3u_0{}^2 u_1$$
$$= -1536t^2$$

maka

$$u_2(t) = -L_{tt}{}^{-1}u'_1 - L_{tt}{}^{-1}(A_1)$$
$$= \frac{376}{3}t^4$$

Analog dengan cara sebelumnya, nilai A_2 diperoleh dengan menggunakan persamaaan (4.8), yaitu

$$A_2 = 3u_0{}^2 u_2 + 3u_1{}^2 u_0$$
$$= 18304t^4$$

maka

$$u_3(t) = -L_{tt}{}^{-1}u'_2 - L_{tt}{}^{-1}(A_2)$$
$$= -\frac{27268}{45}t^6$$

Jadi penyelesaian eksak dari persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t), \cdots$ atau ditulis

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \cdots$$
$$= 4 - 32t^2 + \frac{376}{3}t^4 - \frac{27268}{45}t^6 + \cdots$$

4.2 Persamaan Nonhomogen

Persamaan (4.2) dikatakan nonhomogen jika $\phi(t) \neq 0$, sehingga persamaan (4.2) menjadi

$$u'' + u' + u + f(u) = \phi(t)$$

atau

$$u'' = -u' - u - f(u) + \phi(t) \tag{4.13}$$

dengan nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$, komponen nonliniernya *Nu=f(u)* dan $L_{tt} = \frac{d^2u}{dt}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa *invers* operator L_{tt}^{-1} ada, dan merupakan integral lipat dua t dari 0 sampai t, yaitu

$$L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot)\,dt\,dt$$

Persamaan (4.13) dikatakan nonhomogen jika $\phi(t) \neq 0$. Untuk mengubah $L_{tt}u(t)$, maka digunakan *invers* operator ke dalam persamaan (4.13) sehingga diperoleh :

$$L_{tt}^{-1}L_{tt}u(t) \quad = -L_{tt}^{-1}u' - L_{tt}^{-1}u + L_{tt}^{-1}\phi(t) + L_{tt}^{-1}Nu$$

Berdasarkan nilai awal yang diberikan $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$, maka persamaan diatas dapat ditulis

$$u(t) \quad = u(0) + tu'(0) - L_{tt}^{-1}u' - L_{tt}^{-1}u + L_{tt}^{-1}\phi(t) + L_{tt}^{-1}Nu \tag{4.14}$$

Penyelesaian pada persamaan (4.14) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(t)$ yang merupakan deret $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots$, ditulis

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \end{aligned}$$

Selanjutnya komponen nonlinier Nu diekspansi dengan menggunakan deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka persamaan (4.13) menjadi

$$u(t) \quad = u(0)+tu'(0)-L_{tt}^{-1}u'-L_{tt}^{-1}u+L_{tt}^{-1}\phi(t)+L_{tt}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right)$$

atau

$$u(t) \quad = u(0)+tu'(0)+L_{tt}^{-1}\phi(t)-L_{tt}^{-1}u'-L_{tt}^{-1}u+L_{tt}^{-1}A_0$$

$$+L_{tt}^{-1}A_1+L_{tt}^{-1}A_2+\cdots \tag{4.15}$$

Polinomial Adomian A_n pada persamaan (4.15) di peroleh dari persamaan (2.17)

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}f(u_0)\right)$$

$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}f(u_0)\right)+\left(\frac{u_1^{\,2}}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}f(u_0)\right)$$

$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0}f(u_0)\right)+u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}f(u_0)\right)+\left(\frac{u_1^{\,3}}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}f(u_0)\right)$$

$$A_4 = u_4\left(\frac{d}{du_0}f(u_0)\right)+\left(\frac{u_2^{\,2}}{2!}+u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^{\,2}}f(u_0)\right)+\left(\frac{u_1^{\,2}u_2}{2!}\right)$$
$$\left(\frac{d^3}{du_0^{\,3}}f(u_0)\right)+\left(\frac{u_1^{\,4}}{4!}\right)\left(\frac{d^4}{du_0^{\,4}}f(u_0)\right)$$

$$\vdots$$

Oleh karena,

$$u_0(t) \quad = u(0)+tu'(0)+L_{tt}^{-1}\phi(t)$$

maka

$$u_1(t) = -L_{tt}^{-1}u_0'-L_{tt}^{-1}u_0+L_{tt}^{-1}(A_0)$$

$$u_2(t) = -L_{tt}^{-1}u_1'-L_{tt}^{-1}u_1+L_{tt}^{-1}(A_1)$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(t) = -L_{tt}^{-1}u_u'-L_{tt}^{-1}u_n+L_{tt}^{-1}(A_n)\ ,\ n\ge 0$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{n+1}(t)$ telah diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \tag{4.31}$$

dengan

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)$$

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian eksak dari persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear berikut

$$u_{tt} - u^2 = 2 - t^4 \tag{4.32}$$

atau

$$u_{tt} = u^2 + 2 - t^4$$

dengan masalah nilai awal $u(0)=0$ dan $u'(0)=0$.

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear pada persamaan (4.32) dilakukan dengan menentukan u_0 yang ditulis

$$u_0(t) = u(0) + tu'(0) + L_{tt}^{-1}\phi(t)$$

Berdasarkan nilai awal *u(0)*=0 dan *u'(0)*=0, maka

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 0 + 0 + L_{tt}^{-1}\phi(t) \\ &= t^2 - \frac{1}{30}t^6 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Untuk memperoleh nilai $u_1(t)$, maka kita harus mencari nilai A_0 dari persamaan (4.23), yaitu

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^{\,2} \\ &= \left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)^2 \end{aligned}$$

Oleh karena,

$$u_1(t) = L_{tt}^{-1}(A_0)$$

maka

$$u_1(t) = \int_0^t\int_0^t \left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)^2 dtdt$$

$$= \frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6 \qquad (4.32)$$

Selanjutnya nilai A_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.24), yaitu :

$$A_1 = 2u_0u_1$$

$$= 2\left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)\left(\frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6\right)$$

maka

$$u_2(t) = L_{tt}^{-1}(A_1)$$

$$= \int_0^t\int_0^t 2\left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)\left(\frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6\right)dtdt$$

$$= -\frac{1}{1135134000}t^{22} + \frac{227}{1127763000}t^{13} - \frac{1}{49140}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} \qquad (4.33)$$

Analog dengan cara sebelumnya, nilai A_2 diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.25), yaitu

$$A_2 = 2u_0u_2 + (u_1)^2$$

$$=2\left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)$$

$$\left(-\frac{1}{1135134000}t^{22} + \frac{227}{1127763000}t^{13} - \frac{1}{49140}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6\right)^2$$

maka

$$u_3(t) = L_{tt}^{-1}(A_2)$$

$$= \int_0^t\int_0^t 2\left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right)$$

$$\left(-\frac{1}{1135134000}t^{22} + \frac{227}{1127763000}t^{13} - \frac{1}{49140}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6\right)^2 dtdt$$

$$= \frac{17}{154060386480000}t^{30} - \frac{6311}{169333614450000}t^{26} + \frac{1}{17017000}t^{22} -$$

$$\frac{257}{563881500}t^{18} + \frac{1}{70200}t^{14} \qquad (4.34)$$

Jadi penyelesaian eksak dari persamaan biasa orde dua nonlinear dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t), \cdots$ atau ditulis

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \cdots$$

$$= \left(t^2 - \frac{1}{30}t^6\right) + \left(\frac{1}{163800}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10} + \frac{1}{30}t^6\right) +$$

$$\left(-\frac{1}{1135134000}t^{22} + \frac{227}{1127763000}t^{13} - \frac{1}{49140}t^{14} - \frac{1}{1350}t^{10}\right) +$$

$$\frac{17}{154060386480000}t^{30} - \frac{6311}{169333614450000}t^{26} + \frac{1}{17017000}t^{22} -$$

$$= \frac{257}{563881500}t^{18} + \frac{1}{70200}t^{14} + \cdots$$

BAB V
PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a) Metode dekomposisi Adomian dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ baik yang homogen ($\phi(t)=0$) maupun yang nonhomogen ($\phi(t)\neq 0$) berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$.

b) Semakin banyak jumlah suku-suku $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \cdots$ yang digunakan maka hasilnya akan cukup akurat dan efektif dengan kata lain dapat memperkecil eror

5.2. Saran

Skripsi ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear $u''+u'+u+f(u)=\phi(t)$ baik yang homogen ($\phi(t)=0$) maupun yang nonhomogen ($\phi(t)\neq 0$) berdasarkan masalah nilai awal $u(0) = c_1$ dan $u'(0) = c_2$. dengan komponen nonlinearnya $Nu = f(u)$ menggunakan metode dekomposisi Adomian. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan skripsi ini, penulis sarankan membahas tentang persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear dengan menggunakan metode-metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian. G. "*Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*". Kluwer Academic. Dordrecht.1994

Kaya. D. "The Use of Adomian DecompositionMethod for Solving a Specific Nonliniear Partial Differential Equation". *Bull. Beg. Math. Soc. Vol: **9**:* 343-349. 2002

Mustafa. "Decomposition Method for Solving Parabolic Equation in Finite Domains". *Journal of Ahejiang Univ. Sci. Vol : **6A (10)**: 1058-1064.* 2005

Hasan. Y. Q dan Zhu. L. M. "Modified Adomian Decomposition Method For Singular Initial Value Problems In The Second-Order Ordinary Differential Equation". *Survey in Mathematics and its Application. Vol : **3:**183-193.* 2008

E. Babolian. J. Biazar. A.R.Vahidi. "Solution of a System of Nonlinier Equation by Adomian Decomposition Method". *Applied Mathematics and Computation. Vol : **150:** 847-854*. 2004

E. Babolian. J. Biazar. "Solution of Nonlinier Equation by Modified Adomian Decomposition Method". *Applied Mathematics and Computation. Vol: **132:** 167-172*. 2002

.